Lecture notes

Lukas Rahmn

21 September 2017

Samplingsteoremet

Låt $x(t) \rightarrow_{FT} X(j\omega)$ vara en bandbegränsad signal, $X(j\omega) = 0$ för $|\omega| > \omega_m$. Om samplingsfrekvensen $\omega_s > 2\omega_m$ kan x(t) återskapas utifrån dess sampel värden, $x(nT) \in \mathbb{Z}$. Om x(t) ej är band-begränsad, använd Anti vikninksfilter (Anti aliasing filter),ett kontinuerligt lågpassfilter, som reducerar bandbredden hos en signal, x(t). Vilket attinuerar frekvenskomponenter $> \frac{\omega_s}{2}$. Appliceras innan sampling.

Ideal rekonstruktion

$x(t) \rightarrow_{FT} X(j\omega)$ Efter sampling (multiplikation med impulståget p(t)).

$$x_p(t) \rightarrow_{FT} X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s =))$$

Applicera ett idealt lågpass (LP) rekonstruktionsfilter.

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T, |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 \end{cases}$$

Utsignalen $Y(j\omega) = H_r(j\omega) \cdot X_p(j\omega)$. I tidsdomänen får vi

$$y(t) = h_t(t) * x_p(t) = h_t(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT)$$

I frekvensdomänen ser vi att $Y(j\omega) = X(j\omega)$ och då är också $y(t) = x(t)$. Vi får tillbaka signalen. Titta på impulssvaret

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{T}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}}$$
$$=\frac{T}{\pi T}\sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) = \frac{2\pi}{\omega_s \pi t}\sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_t(t - nT)$$

Praktiska problem

- icke kausalt system
- $h_r(t)$ har oändlig utsträckning

Praktisk rekonstruktion

Hållkrets, nollte ordningen.

System:

$$x_p(t) \to h_0(t) \to x_0(t)$$

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < T \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$$

Sample värdet hålls kvar tills nästa sample värde kommer.

$$x_0(t) = h_0(t) * x_p(t) = \{x[n] = x(nT)\} = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h_0(t - nT)$$

Fourietransformera!

$$X_0(j\omega) = H_0(j\omega) \cdot X_p(j\omega)$$
$$h_0 \to_{FT} H_0(j\omega)$$

Vi får $H_0(j\omega) = 2e^{-j\frac{\omega T}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega}$ Alltså en tidsöfrskjuten sinc funtion.

Aliasing

Låt $x(t) = Acos(\omega_m t) \to_{FT} X(j\omega) = A\pi\left[\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)\right]$
Sampling ger

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Om $\omega_m < \frac{\omega_s}{2}$ Rekonstruktion med ideal rekonstruktionsfilter $H_r(j\omega)$ ger $X_p(j\omega) \cdot H_r(j\omega) = A\pi[\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)]$, vi får tillbaka $x(t) = Acos(\omega_m t)$.

Om $\omega_m > \frac{\omega_s}{2}$. Rekonstruktion med idealt lågpassfilter ger $X_p(j\omega) \cdot H_r(j\omega) = A\pi[\delta(\omega - (\omega_s - \omega_m)) + \delta(\omega + (\omega_s - \omega_m))]$ Vilket motsvarar: $x_r(t) = A\cos((\omega_s - \omega_m) \cdot t)$.