Lecture notes

Lukas Rahmn

20 September 2017

Repetition av viktiga samband

- $x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) * \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = x(t - t_0)$
- Fouriertransformens egenskaper
  - Frekvensskifte:

$$g(t) \rightarrow_{FT} G(j\omega)$$
$$e^{jk\omega_0 t} \rightarrow_{FT} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$
$$e^{jk\omega_0 t} \cdot g(t) = G(j(\omega - k\omega_0))$$

  - Multiplikation och Faltning

$$g(t) * f(t) \rightarrow_{FT} G(j\omega) \cdot F(j\omega)$$
$$g(t) \cdot f(t) \rightarrow_{FT} \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * F(j\omega)$$

Låt $f(t) = e^{jk\omega_0 t}$

$$g(f) \cdot e^{jk\omega_0 t} \rightarrow_{FT} \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) = G(j(\omega - k\omega_0))$$

Låt $g(t) \rightarrow_{FT} G(j\omega)$, icke periodisk signal och $x(t) \rightarrow_{FT} X(j\omega)$ en periodisk signal. Då har den en fourieserie

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

och Fourietransform

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

Bilda ny signal, $y(t) = g(t) \cdot x(t)$

$$y(t) \rightarrow_{FT} \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * X(j\omega) = Y(j\omega)$$
$$Y(j\omega) = \frac{2\pi}{2\pi} G(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k G(j(w - k\omega_0))$$

Sampling

En diskret signal skapas utifrån en kontinuerlig signal $x(t)$.

$$g[n] = x(nT)$$

$g[n]$: en diskret representation av x(t). Värden hos x(t) avläses vid diskreta tid-punkter, nT. Kan x(t) återskapas från $g[n]$? Modell för sampling (innehåller kontinuerliga signaler):

$$x(t) \cdot p(t) = x_p(t)$$
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$p(t)$ är ett impuls tåg. x(t) är kontinuerlig.

$$x(t) \cdot \delta(t - nT) = x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

Multiplikation i tidsdomän ($x(t) \cdot p(t)$) ger faltning i frekvensdomänen.

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

Beräkna $P(j\omega)$, vilken är periodisk med perioden T, så finn dess fourieserie.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \forall k$$

Teckna Fourietransformen p(t).

$$P(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_s)$$
$$= w$$

också ett impulståg men längs ω-axeln. Notera $c_k = \frac{1}{T},\ \omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

$$X_p(j\omega) = X(j\omega) * P(j\omega)$$
$$= \frac{2\pi}{2\pi T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Observera! x(t) kan återskpas $x_p(t)$ genoom lågpassfiltrering och multiplikation med T <u>om</u> $\omega_m < \frac{\omega_s}{2}$.

ω_s: samplingsvinkel frekvens.

ω_m: den samplade signalens högsta vinkel frekvens