Lecture notes

Lukas Rahmn

19 September 2017

Fourierrepresentation

- Kontinuerliga signaler.
  Byggsten : $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$
- Periodiska signaler (Kontinuerliga), $x(t) = x(t+\tau)$
  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$ En viktad summa av $e^{jk\omega_0 t}$
- Kontinuerliga signaler

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

  Viktad summa av $e^{j\omega t}$

Signalernas amplitud fördelade över de ingående frekvenserna

$$|c_k|, \omega = k\omega_0$$
$$|X(j\omega)|, \forall\omega$$

Signalen fas fördelade över de ingående frekvenserna,

$$\arg\{c_k\}, w = k\omega_0$$
$$\arg\{X(j\omega)\}, \forall\omega$$

Utifrån parsevals formel fås:

- Periodisk signal (Effekt Signal) Effekt(täthet) spektrum, totalmedeleffekt

$$P = C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|^2$$

- Kontinuerlig signal (Energisignal)

$$|X(j\omega)|^2 \forall\omega$$

  Energi(täthets)spektrum

Fourietransform av periodiska signaler

Börja så här: Vilken signal har Fourier-transformen $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$?

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)d\omega = 1$$

$x(t)$ är en konstant signal $x(t) = 1, \forall t$, $X(j\omega)$ ger endast bidrag vid $\omega = 0$ Uttnyttja egenskap vid frekvensskift.

$$x(t) \rightarrow_{FT} X(j\omega)$$
$$x(t)e^{j\omega_0 t} \rightarrow_{FT} X(j(\omega - \omega_0))$$
$$1 \cdot e^{j\omega_0 t} \rightarrow_{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$
$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \rightarrow_{FT} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$
$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \rightarrow_{FT} = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

Antag: $x(t)$ är kontinuerlig och periodisk signal som vi kan teckna som en fourieserie. Genom superposition fås

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow_{FT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Två möjliga beskrivningar:

$c_k \leftarrow_{FS}$	x(t)	$X(j\omega)$
Diskret, icke periodisk, viktfaktor för varje ingående frekvens $k\omega_0$	kontinuerlig, periodisk med $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$	kontinuerl

Kontinuerligt LTI-system

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Fouriertransformera!

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

Om insignalen är periodisk, teckna dess fourieserie och därefter notsvarande fourietransfrom.

$$x(t) = \sum k = -\infty^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - \omega_0)$$

Utsignal

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - \omega_0 k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot H(j\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot H(j\omega_0 k) \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

Notera att $c_k H(j\omega_0 k)$ är fourieserie koeff, för y och vi kan teckna

$$y(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot H(jk\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Varje frekvenskomponent i insignalen med frekvens $k\omega_0$ påverkas av systemet med $H(j\omega_0 k)$, vilket kallas systemets frekvenssvar.

Notera $H(j\omega) = Ft\{h(t)\}, H(j\omega) \in \mathbb{C}$

Amplitudpåverkan: $|H(j\omega)|$

Faspåverkan: $\arg\{H(j\omega)\}$

RC krets demo

Bild av RC krets med resistor R och Kap Q

$$Q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau + Q_0$$

$$Q_0 = 0$$

$$Q = c \cdot u_0$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = i(t) = C\frac{du_0(t)}{dt}$$

$$\text{KVL: } -u_i(t) + i(t)R + u_0(t) = 0 \rightarrow RC \cdot \frac{du_0(t)}{dt} + u_0(t) = u_i(t)$$

Fouriertransformera och bilda kvot

$$RC \cdot j\omega U_0(j\omega) + U_0(j\omega) = U_i(j\omega)$$

$$\frac{U_0(j\omega)}{U_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \{RC = \frac{1}{\omega_0}\} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = H(j\omega)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$arg\{H(j\omega)\} = -\arctan(\frac{\omega}{\omega_0})$$