Lecture notes

Lukas Rahmn

13 September 2017

Repition

CTFT

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \omega \in \mathbb{R}$$

Egnenskaper:

- $y(t) = h(t) * x = Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$
- $z(t) = x'(t) \to Z(j\omega) = j\omega X(j\omega)$
- $z(t) = x(t - t_0) \to Z(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

Plancharels formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Energin av en signal

$$x := \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Två signaler x_1 och x_2 är nära om

$$int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt \tag{1}$$

är liten. Formel (1) kallas energi avstånd.

Planchel

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(j\omega) - X_2(j\omega)|^2 d\omega$$

I denna kurs: lågpass filter $y = h * x$

$$H(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_0$$
$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) = 0, \forall |\omega| > \omega_0$$

Specialfall

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| < \omega_0 \\ 0, \text{ övrigt} \end{cases} \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{t}$$

Vill jmfära:

$$E(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega) - H(j\omega)X(j\omega)|^2 d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| > \omega_0}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Mäter bortfiltrerad del.

Ex Fix $\epsilon > 0, x(t) = e^{-t}u(t)$ Bestäm minimalt $\omega_0 > 0$ så att

$$E(x, x_{\text{bortfilltrerat}}) \leq \epsilon$$

Lågpassfiltrera

$$H(j\omega) \begin{cases} 1, |\omega| < \omega_0 \\ 0 \end{cases}$$

Lösning: Bestämm $\omega_0 > 0$ s.a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|w| \geq \omega_0} |X(j\omega)|^2 d\omega < \epsilon$$

I vårt fall: $X(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega} \rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \geq \omega_0} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega \textit{ Jämn funktion}$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{w_0}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \left[\arctan(\omega)\right]_{\omega_0}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_0)\right) < \epsilon$$

Bestäm minimalt ω_0 så att detta uppfylls

CTFS

Krav

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x(t+T) = x(t), \forall t \in R$$
$$\int_0^T |x(t)| dt < \infty$$

Definition

$$c_k(x) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\omega_k t} dt, \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

Egenskaper

- $y = h * x, xT - periodisk \rightarrow c_k(y) = H(j\omega_k) \cdot x_k(x), \forall$
- $z(t) = x'(t) \rightarrow c_k(z) = j\omega_k c_k(x)$
- $z(t) = x(t - t_0) \rightarrow c_k(z) = e^{-j\omega_k t_0} c_k(x)$

Parsevals formel

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 \tag{2}$$

Exempel

- Beräkna c_k om $x(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t \le 1 \\ -11 < t < 2 \end{cases}$ där $x(t+2) = x(t) \forall t, \rightarrow$ $T = 2$
- Lösning

$$c_k(x) = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t) \cdot e^{-j\omega_k t} dt = \{\omega_k = \pi k\} = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1 \cdot e^{-j\pi k t} dt + \int_1^2 (-1) \cdot e^{-j\pi k t} dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{-e^{-j\pi k t}}{j\pi k}\right]_0^1 + \left[\frac{-e^{-j\pi k t}}{j\pi k}\right]_1^2\right)$$
$$= \frac{1}{2j\pi k}\left(-e^{-j\pi k} + 1 + e^{-j\pi k 2} - e^{-j\pi k}\right) = \frac{1}{2j\pi k}(2 - 2e^{-j\pi k})$$
$$= \frac{1}{j\pi k}(1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0, \ k \text{ jämn } (k \neq 0) \\ \frac{2}{j\pi k}, \ k \text{ udda } (k \neq 0) \end{cases}$$

Beräkna även $c_0(x)$

$$c_0(x) = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t) dt = 0$$

Slutligen

$$c_k(x) = \begin{cases} 0, \ k \text{ jämn} \\ \frac{2}{j\pi k}, \ k \text{ udda} \end{cases}$$

Parseval

$$|x(t)|^2 = 1, 0 \le t < 2$$
$$\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1 =_{parseval} \sum_{\text{k udda}} \frac{4}{\pi^2 k^2} = 2 \sum_{\text{k udda } k>0} \frac{4}{\pi^2 k^2}$$
$$\rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \dots$$

Exempel 2

- Antag att $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är 2-periodisk. på formen ... *Vacker bild på grafen av x här* ... Beräkna

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot k^2$$

Den vackra bilden ger $T = 2, \omega_k = \frac{2\pi k}{2} = \pi k$

Föreläsaren ritade faktiskt en bild, men har inte ritplattan med mig

- Observera

$$|c_k(x)|^2 k^2 = \frac{1}{\pi^2} |\pi k c_k(x)|^2 = \frac{1}{\pi^2} |j\omega k \cdot c_k(x)|^2 = c_k(x')$$

En till vacker bild här, fortfarande ingen ritplatta

Parseval:

$$\sum k^2 |c_k(x)|^2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x')|^2 = \frac{1}{2} \int_0^2 |x'(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} 4dt = 2$$

Exempel 3

- LTI-system

$$y = h * x, H(j\omega) = \begin{cases} 1 - |\omega|, |\omega| \leq 1 \\ 0, |w| > 1 \end{cases}$$

Om $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{jkt}$ vad blir y= 2π-periodisk

- Lösning:

$$c_k(y) = H(j\omega_k) c_k(x), \omega_k = \frac{2\pi k}{2\pi} 0k$$

$$H(j\omega_k) = H(jk) = \begin{cases} 0, k \neq 0 \\ 1, k = 0 \end{cases} \quad \to c_k(y) = \begin{cases} 0, k \neq 0 \\ c_(x), k = 0 \end{cases}$$

$$c_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, \forall k \geq 0 \\ 0, k < 0 \end{cases}$$

$$\to y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{jkt} = 1$$