Lecture notes
Lukas Rahmn

Fourieranalys, 5.3 to 4.1

Repetion

LTI-system, $y(t) = (h * x)(t) = \int_{-infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$
Stabilitet $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < +\infty$ (Antags närmaste veckan)

Inledning

Fundamental observation Om $X_\omega(t) = e^{j\omega t}, \omega \in \mathbb{R}, j^2 = -1$
så gäller $y_\omega(t) = (h * x_\omega)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{j\omega(\tau-t+t)}d\tau$
$\int_{-\infty}^{\infty} h(-\tau)e^{j\omega(-t)}d\tau \cdot e^{j\omega t} = H(j\omega) \cdot X_\omega(t)$
$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega t}d\tau$

$H(j\omega)$ oberoende av t

Således: x_ω egenvektor till LTI-system, $y = Sx = h * x$ med egen värde $H(j\omega)$

Exempel

- Kan vi hitta ett stabilt h s.a. $x(t) = e^{jt}$ ger $y(t) = 5e^{3jt}$?
- Lösning. Observera $x = x_1, (\omega = 1)$. Om h existerar så gäller $y(t) = H(j1) * e^{jt} \underset{?}{=} 5e^{3jt}$ Omöjligt!

Tidskontinuerlig Fourietransform (CTFT)

Om $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uppfyller $\int_{-i\infty}^{\infty} |x(t)|dt < +\infty$ så defineras dess Fouriertransfrom X enligt $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \omega \in \mathbb{R}$
Egenskaper:

- X begränsad och kontinuerligt
- X bestämmer x entydligt, (nästan överallt)

Exempel

- $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$ Beräkna X
- Lösning:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}dt$$
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt = \left[-\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{\alpha+j\omega}\right]_{t=0}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\alpha+j\omega}\right) = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

Fundamental likhet

Om $h, x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ upfyller $\int_{-\infty}^{\infty} |h|, \int_{-\infty}^{\infty} |x| < +\infty$ och $y = h * x$ så gäller

- $\int_{-\infty}^{\infty} |y| < +\infty$
- $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$ (Fundamental likhet!!)

Faltning motsvarar multiplikation av fourietransformen

Bevis av fund likhet.

$$\begin{aligned}
Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) e^{-j\omega(t-\tau+\tau) d\tau dt} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{j\omega t} dt x(\tau) e^{-j\omega t} d\tau = H(j\omega) \cdot X(j\omega)
\end{aligned}$$

Typisk tenta uppgift (TTU)

- Bestäm alla stabila LTI-system $y = h * x$, så att $x(t) = e^{-t} u(t)$ ger utsignalen $y(t) = te^{-2t} u(t)$.
- Lösning: Fundamental likhet: $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) \to H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

$$\begin{aligned}
&X(j\omega) = \{\alpha = 1\} = \frac{1}{1+j\omega} \\
&Y(j\omega) = \int_0^{\infty} te^{-2t} e^{j\omega t} dt = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-(2+j\omega)t} dt \\
&\text{partiell integration} = \left[-t \cdot \frac{e^{-(1+j\omega)t}}{2+j\omega} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot \frac{e^{-(2+j\omega)tdt}}{2+j\omega} \\
&= \frac{1}{(2+j\omega)^2} \\
&H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1+j\omega}{(2+j\omega)^2} = \frac{2+j\omega-1}{(2+j\omega)^2} \\
&= \frac{1}{2+j\omega} - \frac{1}{(2+j\omega)^2} \to \\
&\to h(t) = e^{-2t} u(t) - t^{-2t} u(t) = (1-t) e^{-2t} u(t)
\end{aligned}$$

Räkneoperationer med CTFT

- $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \equiv X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$

- $z(t) = t \cdot x(t) \equiv Z(j\omega) = j \cdot X'(j\omega)$

  Bevis: $Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot x(t)e^{-j\omega t}dt = j\frac{d}{d\omega}\int_{-i\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = jX'(j\omega)$

  Ex: Vet $x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \equiv X(j\omega) = \dfrac{1}{\alpha + j\omega}$

  $x_1(t) = te^{-\alpha t}u(t) = t \cdot x(t) \equiv Z_1(j\omega) = jX'(j\omega) = j \cdot \dfrac{-j}{(\alpha + j\omega)^2} = \dfrac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$

  $z_2(t) = t^2 \cdot x(t) \to Z_2(j\omega) = j^2 \cdot X''(j\omega) = \dfrac{2}{(\alpha + j\omega)^3}$

- $z(t) = x(t - t_0) \equiv Z(j\omega) = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
- $z(t) = x(-t) \equiv Z(j\omega) = X(-j\omega)$
- $z(t) = x(a \cdot t) \equiv Z(j\omega) = \frac{1}{|a|}X(j\omega/a), a \neq 0$

Exempel

- $z(t) = e^{4t}u(1 - 2t)$ Bestämm CTFT
- Lösning: $z(t) = w(-2t)$, där $w(t) = e^{-2t}u(t+1)$

  $w(t) = e^{-2(t+1-1)}u(t+1) = e^2 v(t+1), v(t) = e^{-2t}u(t) \quad V(j\omega) = \{\alpha = 2\} = \dfrac{1}{2 + j\omega} \to$

  $W(j\omega) = e^2 \cdot e^{j\omega}V(j\omega) = \dfrac{e^{2+j\omega}}{2 + j\omega}$

  $Z(j\omega) = \dfrac{1}{|-2|} \cdot V(-j\omega/2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{2-j\omega/2}}{2 - j\omega/2}$