Lecture notes

Lukas Rahmn

7 September 2017

Repetion

- LTI-System $y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ (faltning)
- BIBO-stabilit: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < +\infty$
- Kausalitet:$h(t) = 0, \forall t < 0$

Exempel

$h_+(t) = e^{\alpha t}u(t), h(t) = e^{\alpha t}u(t), u(t) :=$ steg funktionen
Stabilitet för $y\pm = h_\pm * x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_0^{\infty} e^{\alpha t}dt = \begin{cases} \infty, \alpha \geq 0 \\ \frac{1}{\alpha}, \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-infty}^{0} e^{\alpha t}dt = \begin{cases} \infty, \alpha \leq 0 \\ \frac{1}{\alpha}, \alpha < 0 \end{cases} \quad => \text{(Stabilitet om } \alpha > 0)$$

Exempel 2 Kausalitet

h_+ kausal, h_- ej kausal

LTI-system och ODE

Kausalt LTI-system $y(t) = (h * x)(t)$ Antag att för snälla", s.a. $x(t) = 0, \forall t < 0$, så uppfyller y och x en ODE med <u>konstanta</u> koefficienter.

Problem: kan vi återskapa h från ODE:n?

Ex.

$$y(t) = (h * x)(t) \text{ [Kausalt]}$$
$$y'(t) - 3y(t) = x(t), x(t) = 0 \forall t < 0$$
Lösning (Integrerande faktor)
$$(y'(t) - 3y(t))e^{-3t} = x(t)e^{-3t}$$
$$(y(t)e^{-3t})' = x(t)e^{-3t}$$

Kausalt ger $y(t) = 0, \forall t < 0$

$y(t)e^{-3t} = \int_0^t (y(\tau)e^{-3\tau})' d\tau = \int_0^t x(\tau)e^{-3\tau} d\tau \Rightarrow y(t) = \int_0^t x(\tau)e^{3(t-\tau)} d\tau$

Inför $h(t) = e^{3t}$ kom ihåg, $x(t) = 0, \forall t < 0$

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = (h * x)(t)$

där $h(t) = e^{3t}u(t)$

Är systemet stabilt? Nej $h = h_+, \alpha = 3 \rightarrow$ Ej stabilt!

Mer allmänt $y' - \alpha t = x \rightarrow y(t) = (h_\alpha * x)(t), h_\alpha = e^{\alpha t}u(t)$.

Exempel

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x \\ x(t) = 0, \forall L < 0, \rightarrow_{\text{kausalitet}} y(t) = 0, \forall t < 0 \end{cases}$$

Observera

$$y'' - 3y' + 2y = (y' - y)' - 2(y' - y) = x$$

Inför $z = y' - y,$ s.a. $z' - 2z = x$

$z = h_2 * x \rightarrow y' - y = z \rightarrow_{h_\alpha(t)} y = h_1 * z \rightarrow y = h_1 * (h_2 * x) = (h_1 * h_2) * x \rightarrow y = h * x, h = h_1 * h_2$

Övning

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau)h_2(\tau)d\tau = \int_0^t e^{t-\tau}e^{2\tau}d\tau$$

Allmän strategi (Kausalt LTI-system)

$y = h * x, y^(n) + a_{n-1}y^{n-1} + ... + a_1 y^1 + a_0 * y = x, x(t) = 0, \forall t < 0$

Karakteristiska ekvationen: $\tau^n + a_{n-1} * \tau^{n-1} + ... + a_1\tau + a_0 = 0$

Rötter (Möjligen komplexa): $\tau_1, \tau_2, ..., \tau n \rightarrow h_{\tau_k(t)} = e^{\tau_k t}u(t)$

$\rightarrow h(t) = (h_{\tau_1} * h_{\tau_2} * ... * h_{\tau_n})$

T.ex: $y^(2) - 3y^(1) + 2y = X \rightarrow \tau^2 - 3\tau + 2 = 0 \rightarrow \tau_1 = 1, \tau_2 = 2 \rightarrow h = h_1 * h_2$

LTI system och differans elvationer

Kausalt LTI-system,diskret tid, $y[n] = (h * x)[n]$ Antag att för alla x med $x[n] = 0, \forall n < 0$, så uppfyller y och x en DIE med konstanta koefficienter.

Kan vi återskapa $h[t]$ från DIE

Se kapitel 10.4 till 10.7

Exempel

- Finn h om

$$\begin{cases} y[n] - ay[n-1] = x[n] \\ x[n] = 0, \forall n < 0 \end{cases}$$

- Lösning: (Kausalitet ger $y[n] = 0, \forall n < 0$)

  $$\begin{aligned}
  &y[0] = x[0] \\
  &y[1] = a \cdot y[0] + x[1] = ax[0] + x[1] \\
  &y[2] = a \cdot y[1] + x[2] = a(a \cdot x[0] + x[1]) + x[2] = a^2 \cdot x[0] + a \cdot x[1] + x[2] \\
  &\vdots \\
  &y[n] = a^n \cdot x[0] + a^{n-1} \cdot x[1] + \cdots + x[n] = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \cdot x[k]
  \end{aligned}$$

  Inför:

  $$\begin{aligned}
  h_a[n] &= a^n \cdot u[n], u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \\
  y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a[n-k]x[k] = (h * x)[n]
  \end{aligned}$$

  Är systemet stabilt? Alltså:

  $$\begin{aligned}
  &\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_a[k]| < +\infty \\
  &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a|^n = \begin{cases} \infty, |a| \geq 1 \\ \frac{1}{1-|a|}, |a| < 1 \end{cases}
  \end{aligned}$$

Exempel högre ordningens differens ekvationer

- Finn h om

  $$\begin{cases} y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] \\ x[n] = 0, \forall n < 0 \end{cases}$$

- Lösning:

  $$\begin{aligned}
  &y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] \\
  =&(y[n] - y[n-1]) - 2(y[n-1] - y[n-2]) \\
  =&z[n] - 2z[n-1] \\
  &z = h_2 * x \to y[n] - y[n-1] = z[n] \\
  &y = h_1 * z = h_1 * (h_2 * x) = (h_1 * h_2) * x = h * x
  \end{aligned}$$

Allmän strategi: Kausalt LTI:

$$y = h * x \begin{cases} y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_k y[n-k] = x[n] \\ x[n] = 0, \forall n < 0 \end{cases}$$

Karakteristiska ekvation $\qquad \tau + a_1\tau^{n-1} + \cdots + a_k = 0$

Rötter $\tau_1, \ldots, \tau_n$