Lecture notes

Lukas Rahmn

26 September 2017

Repition

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\int_{-infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ CTFT:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \omega \in \mathbb{R}$$

Fundamental observation:

$y = h * x$, stabilt $\iff$ $h(t)$ ändligt integrerbar. Ger $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$ om x(t) är ändligt integrerbar.

Problem

Kan endast användast för stabila LTI-system!

(Ensidiga) Laplacetransformen

Definitioner:

- $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är högersidigt om $x(t) < 0 \forall t < 0$
- -| |- är exponentiel begränsad om $\exists a > 0 \to |x(t)| \leq \; Me^{at} \forall t \geq 0$
  T.ex:
  $x(t) = e^t \cdot u(t)$, Exponentielt begränsad $M = a = 1$
  $x(t) = e^{t^2} u(t)$ [Ej exponential begränsad

Observation

- Ett LTI system är kausalt om $h(t) = 0, \; \forall t < 0$ dvs h är <u>högersidig</u>.
- Om $|x(t)| \leq M^{at} \forall t > 0$ och x(t) högersidig, då
  $$\int_0^{\infty} |x(t)| e^{-bt} dt < \infty \forall b > a$$

Idé bakom Laplacetransformen

Om $|x(t)| \leq Me^{at}, t \geq 0$ och x(t) högersidig, så fourietransformera:

$$x_b(t) = x(t)e^{-bt}$$

för $b > a$

$$\to X_b(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-bt}e^{j\omega t} dt$$

$$\int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-(b+j\omega)t} dt, (b > a)$$

Def Laplacetransformen

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, (Exponentielt begränsad och högersidig) def

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)^{-st} dt$$

$$\text{Roc}(x) = \{s \in \mathbb{C} : X(s) \text{ existerar}\}$$

Om $|x(t)| \leq Me^{at} \to \text{Roc}(x) \supseteq \{Re(s) > a\}$

Roc, Region of Convergence

Fler observationer

Om h,z högersidiga så gäller $(h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau, t \geq 0 \end{cases}$

I synnerhet $h * x$ också högersidig.

Om h,x högersidiga och exponentielt begränsade ger det att $h * x$ är exponetielt begränsad och högersidig.

Fundamental observation

Om $h, x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ högersidig och exponentielt begränsad. $y = h * x \to$ $Y(s) = H(s)X(s) \forall s \in \text{Roc}(H) \cap \text{Roc}(x)$

Egenskaper

- x bestäms entydligt av $(x, Roc(X))$
- $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \iff \begin{cases} X(s) = \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s) \\ \text{Roc}(x) = \text{Roc}(x_1) \cap \text{Roc}(x_2) \end{cases}$
- $x = z(t - t_0), t_0 > 0 \iff \begin{cases} X(s) = e^{-st_0} Z(s) \\ \text{Roc}(x) = \text{Roc}(z) \end{cases}$
- $x(t) = z'(t),$ z exp begränsad $\iff X(s) = sZ(s) - Z(0)$
  Bevis
  $$X(s) = \int_0^\infty z'(t)e^{-st}dt = [z(t)e^{-st}]_0^\infty + \int_0^\infty z(t) \cdot e^{-st}dt = 0 - Z(0) - Z(s)$$
- $x(t) = z''(t) \to X(s) = s^2 Z(s) - sZ(0) - Z'(0)$
- $x(t) = e^{at}u(t) \iff X(s) = \frac{1}{s-c}, \text{Re}(s) > \text{Re}(c)$

Exempel

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-3t}u(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Bestäm y!

Lösning:

$$\begin{cases} y'' \to sY(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1 \\ y' \to sY(s) - y(0) = sY(s) \end{cases}$$

$$\to_{VL} s^2Y(s) - 1 - 3(sY(s) - 0) + 2Y(s) = (s^2 - 3s + 2)Y(s) - 1$$
$$\to_{HL} \{c = 3\} = \frac{1}{s+3}$$
$$\to (s^2 - 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{s+3} + 1 = \frac{s+4}{s+3}$$
$$\to Y(s) = \frac{s+4}{(s^2 - 3s + 2)(s+3)} = \frac{s+4}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}$$
$$= AY_1(s) + BY_2(s) + CY_3(s) \to y_1(t) = e^t u(t), y_2(t) = e^{2t}u(t), y_3(t) = e^{-3t}u(t)$$
$$\to y(t) = (Ae^t + Be^{2t} + Ce^{-3t}u(t)$$

Lös partialbråkets koefficienter för att lösa ekvationen.

Exempel, Laplace transform av LTI system

Kausalt LTI-system $y = h * x$ Antag :

- $h(t) = e^{2t}u(t)$
- $y(T) = e^{4t}u(t-1)$

Vad måste x ha varit?

Lösning:

Notera att det inte går att fourie-transformera dessa, de är ej ändligt integrerbara, men de är exponentielt begränsade och högersidig

$$Y(S) = H(s) \cdot X(s) \to X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)}$$
$$H(s) = \{c = 2\} = \frac{1}{s-2}, Re(s) > 2$$
$$y(t) = e^{4(t-1+1)}u(t-1) = e^4 \cdot z(t-1), z(t) = e^{4t}u(t)$$
$$\to \{t_0 = 1\} Y(s) = e^4 \cdot e^{-s} Z(s) = \{c = 4\} = e^4 \cdot e^{-s} \cdot \frac{1}{s-4}, Re > 4$$
$$\to X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = e^4 \cdot e^{-s} \cdot \frac{\frac{1}{s-4}}{\frac{1}{s-2}}$$
$$= e^4 \cdot \frac{s-2}{s-4} e^{-s} = e^4 \cdot e^{-s} + e^4 \cdot \frac{1}{s-4} \cdot e^{-s}$$
$$= e^4 X_1(s) e^{-s} + e^4 X_2(s) \cdot e^{-s} \to x(t) = e^4 x_1(t-1) + e^4 x_2(t-1)$$

Hitta x_1 och x_2

$$\begin{cases} x_1(t) = \delta(t) \\ x_2(t) = \{c = 4\} = e^{4t}u(t) \end{cases}$$
$$\to x(t) = e^4(\delta(t-1) + e^{4(t-1)}u(t-1))$$

Vad betyder detta egentligen

$$e^{4t}u(t-1) = \int_0^\infty e^{2\tau} \cdot x(t-\tau)d\tau$$

Väldigt svårt att lösa i tidsdomänen. Använd laplace.