Lecture notes

Lukas Rahmn

5 September 2017

I kursen studerar vi LTI-system (Linjära,Tids Invarianta system). Ett vanlig sätt att karakterisera ett system är att ange dess utsignal för en given (och känd insignal). För insignalen $x(t)$, en enhetsimpuls blir signalen $y(t) = h(t)$ systemets impuls respons. Motsvarande samband fås för ett diskret system. Insignalen $x[n] = \delta[n]$ ger utsignal $y[n] = h[n]$, systemets impuls svar

Samband mellan insignal och utsignal för ett LTI-system

- *Diskret fall:* Antag att vi känner impulssvaret till ett diskret LTI-system. $x[n]$ är en godtycklig insigan (diskret). Bilda produkten $x[n] \cdot \delta[n] = x[0] * \delta[n]$ av insignalen och därefter produkten $x[n] \cdot \delta[n-k] = x[k] \cdot \delta[n-k]$.

  Tydligen kan vi teckna x[n] som en summa av viktade och skiftade enhetsimpulser.

  $$x[n] = ...x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + ...$$
  $$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

  För ett LTI-system gäller:

Insignal	Utsignal
$\delta[n]$	$h[n]$ *impulssvar*
$\delta[n-k]$	$h[n-k]$ *TI*
$x[k]\delta[n-k]$	$x[k]h[n-k]$ *Homogent*
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$	$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ (*faltningsumma*)

  Förenklat skrivsätt $y[n] = x[n] * h[n]$.
  Genom en variabelsubstitution kan man visa att

  $$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

  och alternativt
  $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- *Kontinuerligt fall:* Antag att vi känner impulssvaret h(t) till ett kontinuerligt LTI-system. Låt x(t) vara en godtycklig insignal. Dela in signalen i rektanglar med bredd ϵ och höjd $x(\epsilon k)$. $\hat{x}(t)$ utgör denna approximation av $x(t)$ där $\hat{x}(t)$ är summan av pulserna. Vi definerar en enhetspuls som

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, 0 \leq t < \epsilon \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$$

Våra pulser kan vi nu teckna som

$$\begin{aligned}
x_{-1} &= \delta_\epsilon(t+\epsilon)x(-\epsilon)\epsilon \\
x_0 &= \delta_\epsilon(t)x(0)\epsilon \\
x_1 &= \delta_\epsilon(t-\epsilon)x(\epsilon)\epsilon \\
x_2 &= \delta_\epsilon(t-2\epsilon)x(2\epsilon)\epsilon \\
&\vdots \\
\hat{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon
\end{aligned}$$

Låt $h_\epsilon(t)$ vara systemets utsignal för insignalen $\delta_\epsilon(t)$ (pulssvar).
För ett LTI system gäller

Insignal	Utsignal
$\delta_\epsilon(t)$	$h_\epsilon(t)$
$\delta_\epsilon(t-k\epsilon)$	$h_\epsilon(t-k\epsilon)$
$\delta_\epsilon(t-k\epsilon)$	$h_\epsilon(t-k\epsilon)$
$\delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$	$h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$
$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$	$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$

$$\begin{aligned}
&\text{Låt } \epsilon \to 0 \\
&\delta_\epsilon(t) \to \delta(t) \\
&h_\epsilon(t) \to h(t) \\
&k\epsilon \to \tau \text{ En kontinuerlig variabel} \\
&\epsilon \to d\tau \\
&\sum \to \int \\
&\hat{x}(t) \to x(t) \\
&\hat{y}(t) \to y(t)
\end{aligned}$$

Vi får

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

Förenklat skrivsätt $y(t) = h(t) * x(t)$. Genom en variabel subsition kan man visa att $h(t) * x(t) = x(t) * y(t)$ vilket ger

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Systemegenskaper kopplad till impulssvaret

- *Kausalt LTI-system*
  Diskret fall $h[k] = 0$ för $k < 0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

  Kontinuerligt fall, $h(t) = 0, t < 0$

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- *Stabilt system* Diskret system Antag $|x[n]| < M_x < \infty, \forall n \rightarrow$ Begränsad insignal

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

  Notera triangle olikheten $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \cdot |x[n-k]|$$

  men $|x[n-k] \leq M_x$

$$|y[n]| \leq M_x \sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]|$$

  Med $|y[n]| < \infty, \forall n$ krav för stabilitet följer villkoret om

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

  Absolut summerbart impulssvar!
  Motsvarande gäller för ett kontinuerligt och stabilt system

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$