Lecture notes SSY080

Lukas Rahmn

1 September 2017

Komplexa exponentialer, Steg funtionen, Enhetsimpulsen och System egenskaper

Komplexa exponentialer

$$\text{Kont: } x(t) = Ce^{at}$$
$$\text{Disk: } x[n] = Ca^t, \text{Allmänt: } C, a, x \in \mathbb{C}$$

Signalmodel

Fall 1 $C, a \in \mathbb{R}$ $a > 1 =>$ funktionen ökar
$0 < a < 1 =>$ funktionen avtar
$a < 0$ teckenväxling i $x[n]$
Fall 2: $C, a \in \mathbb{C}$, men låt $|a| = 1$

$$a = 1 * e^{i\phi}$$
$$C = A * e^{i\phi}$$
$$x[n] = Ae^{i\pi} * e^{i\omega_0 * n} = Ae^{i(\omega_0 * n + \phi)} = Acos\omega_0 + \phi + jAsin\omega_0 + \phi$$

Fall 3: $C, a \in \mathbb{C}$

$$C = Ae^{i*\phi}$$
$$a = Be^{i*\Omega_0} = \{B = e^{\Sigma_0}\}e^{j\Omega + \Sigma_0}$$
$$x[n] = Ae^{j\phi} * e^{(j\Omega + \Sigma_0)n} = Ae^{\Sigma_0 * n} * e^{j(\Omega_0 + \Phi)}$$
$$x[n] = Ae^{\Sigma_0 * n}(cos(\Omega_0 * n + \Phi) + jsin(\Omega_0 * n + \Phi))$$

Enhetsteg (Kontinuerlig)

Def

$$u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Vi låter $u(0)$ vara odefinerad, andra definerar den som 0,1,eller $\frac{1}{2}$

Enhetsimpuls, $\delta(t)$ (Kontinuerlig)

Ingen vanlig funtion, en distribution"
Beskriving:

$$\delta(t) = t, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

En oändligt "kortsignal men en oändligt högämplitud. Amplituden vid $t = 0$ är ej begränsad. Man kan tänka sig $\delta_\epsilon(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$ och $\delta(t) = lim_{\epsilon->0}\delta_\epsilon(t)$ Enhetsimpulen defineras futifrån sina egenskaper, ej sina amplitudvärden. Låt f(t) vara en godtycklig signal (funktion) som är kontinuelig för $t = t_0$ Då är $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$ och vidare

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Samband Enhetsteg och Enhetsimpuls (Kontinuerlig)

Samband

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau$$

Diskret enhetsteg

$$u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

Diskret enhetsimpuls

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Samband Enhetsteg och Enhetsimpuls (Diskret)

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$
$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]$$

System

En process där det finns ett samband mellan örsak och verkan "
Orsak, insignal
verkan, utsigal

Systemegenskaper

Tidsinvariant, TI

För ett TI system gäller

Insignal	Utsignal
$x(t)$	$y(t)$
$x(t-t_0)$	$y(t-t_0)$

Tidsinvariant om:

$$y(t-t_0) = y_d(t)$$
$$x(t)->\text{system}->\text{Delay } t_0->y(t-t_0)$$
$$x(t)->\text{Delay } t_0->\text{System}->y_d(t)$$

Linjärt

För linjärt system gäller

Insignal	Utsignal
$x(t)$	$y(t)$ *a konstant, Homogent*
$ax(t)$	$ay(t)$
$x_1(t)$	$y_1(t)$
$x_2(t)$	$y_2(t)$
$x_1(t)+x_2(t)$	$y_1(t)+y_2(t)$ *Additivt*
$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+...$	$a_1y_1(t)+a_2y_2(t)+...$ a_i *är konstanter, superposition*

Äddítivt"+ "Homogen-> Linjärt

Kausalt

$$x(t)->\text{System}->y(t)$$

Ett system är kausalt om utsignalen $y(t)$ endast beror av samtida och/eller tidigare värden på insignalen, $x(t-t_0), t_0 \geq 0$. Alla fysikaliska system är kausala.

Minne (Dynamiskt)

Ett system har minne om dess utsignal vid tidpunkten t_0 beror på fler insignal värden än $x(t_0)$.

Ex. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Minneslöst system (Statiskt)

Utsignal beror endast på det samtida insignalvärdet.

Ex.

$$y(t) = kx(t)$$
$$y[n] = x[n]^2$$

Studera egenskaper för det diskreta fallet i kursboken.