Föreläsnings anteckningar

Lukas Rahmn

20 september 2017

Innehåll

Lecture notes DAT037

Lukas Rahmn

2 november 2016

Tidkomplexitet(tidsåtgång)

1. Mäta impiriskt
2. noggrant ränkna anta intruktioner
3. förenklad modell/komplexitets analysi

$O(n^2), O(n \log n)$växer olika fort men $O(n^2)$ kan vara bättre algoritm för små n

Konstnadsmodeller

Uniform modell

1. Tal kan vara hur stora som helst
2. Oändligt minne

Logaritmisk modell

1. Tidsåtgången för operationer på tal är propotionell mot antal bitar
2. Oändligt minne

$n = 2^k, k = \log n$

Ändligt minne: Algoritmen tar $O(n^2) \leq O(m^2), m = 4GB$ Alltså begränsar minnet mer än algoritmen.

Bästa-, värstafallskomplexitet

```
void filter(double[] x){
    for(i=0; i < x.length-5;i++){
        double s=0;
        for(int j=i; j < i+5; j++){
            s+=x[j];
        }
        x[i]=s/5;
    }
}
```

```
hasDuplicate(){
    for(...){
        if(a[i]==a[i+1]) return true;
    }
}
```

Bästa fall $O(1)$, värsta $O(n)$

$T(n) = O(n)$

Notera att den inre loopen upprepas endast 5 gånger oavsett n, därför är den inre loopen konstant tid. Därför är totalt tidskomplexiteten $O(n)$ inte $O(n^2)$

```
void f(int[] x){
    for(int i=x.length; i >0; i /=2){
        x[i-1]=0;
    }
}
```

$i = 2^k$

$i = 2^{k-1}$

$\dots$

$i = 1 = 2^0$

$T(2^k) = O(k+1) = O(k) = O(_2\log n) = O(logn)$

$T(n) = O(logn)$

Dynamisk array

Kom ihåg IntMultiSet. Den inehåller en int[] arr;

```
void add(int x){
    ...
}
```

P.ga av att arrayen är av fixed storlek så blir add $O(n)$

```
cclass IntMultiSet{
    int[] a;
    int size;
    void add(int x){
        if(size=a.length){
            int[] newa = new int[size+10];
            for(int i=0;i<size;i++){newa[i]=a[i];}
            a=newa;
        }
        a[size]=x;
        size++;
    }
}
```

Add fortfarande $O(n)$, värsta fall är fortfarande av linjär komplexitet

Ersätt istället size+10 med size*2.

Amorterad tidskomplexitet

Add med

[ ]

$[x_1]$ ø o

$[x_1, x_2]$ ø ø o o o

$[x_1, x_2, x_3, \_]$ o o o o o

$[x_1, x_2, x_3, x_4]$ ø ø ø ø o o o

$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \_, \_, \_]$ o o o o o

Amorterad komplexitet $O(1)$.

Java generics

```
void reverse(int[] arr)
    int tmp;
        for(...){
```

```
                    tmp=arr[i];
                    arr[i]=arr[i+1]
                        .
                    }
```

Generisk

```
        void<E> reverse(E[] arr)
            E tmp;
                for(...){
                    tmp=arr[i];
                    arr[i]=arr[i+1]
                        .
                    }
```

Generics:

1. metoder
2. interface
3. klasser

Datastrukturer

ADT

Man skiljer på vad man kan göra med en datastruktur och hur den är implementerad. Implementationerna kan skillja sig mellan olia listor men alla listor stödjer ett antal metoder.

Listor (Stackar,Köer)

Listor (interface i java collection framework) ArrayList, LinkedList är exempel på konkreta listor.

List	add(x),add(x,i),remove(i),get(i)
Stack	pop, push *LIFO*
Kö	enqueue,dequeue, *(FIFO)*

MVE055-EXAM-NOTES

Lukas Rahmn

Probability

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$P[A_1 \cup A_2]=P[A_1]+P[A_2]-P[A_1 \cap A_2]$$

$$P[A_2|A_2]=\frac{P[A_1 \cap A_2]}{P[A_1]}$$

$$P[A_j|B]=\frac{P[B|A_j]P[A_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[B|A_i]P[A_i]}$$

Series

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}=\frac{a}{1-r} \quad |r|<1$$

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Arithmetic Series: $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

Expectancy & Variance

$$E[H(X)]=\sum_{x \in X} H(x)f(f)$$

$$E[H(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)dx$$

$E[c]=c,\ E[cX]=cE[X]$

$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$

$E[XY]=E[X]E[Y]$ *iff indepentent*

$\sigma^2=Var[X]=E[(X-\mu)^2]=E[X^2]-E[X]^2$

$Var[c]=0,\ Var[cX]=c^2Var[X]$

$Var[aX+bY]=a^2Var[X]+b^2Var[Y]+ abCov(X,Y)$

$Cov(X,Y)=E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$

$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$

Moment generating functions

$m_X(t)=E[e^{tX}]$

$$\left.\frac{d^k m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=E[X^k]$$

$Y=X_1+\ldots X_n \Longleftrightarrow m_y(t)=m_{x_1}(t)*\ldots m_{x_n}(t)$

$Y=\alpha+\beta X \rightarrow m_Y(t)=e^{\alpha t}m_X(\beta t)$

Discrete distributions

$X \sim Geo(p) \rightarrow F_x(t)=1-(1-p)^{\text{floor}(t)}$

$$P[X>x]=1-P[X \leq x]=1-F_X(x)=\sum_{x \in X} f(x)$$

$f_X(t)=F_X(t)-F_X(t-1)$

Continuous distributions

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$$

$$P[a \leq X \leq b]=\int_a^b f_X(x)dx$$

$P[X=x]=0$

$P[X \geq x]=1-P[X \leq x]=1-F_X(x)$

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$$

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}$$

Continuity correction

Discrete	Continuous
$P[X=x]$	$P[x-0.5<X<x+0.5]$
$P[X \leq x]$	$P[X<x+0.5]$
$P[X<x]$	$P[X<x-0.5]$
$P[X \geq x]$	$P[X<x-0.5]$
$P[X>x]$	$P[X<x+0.5]$

Chebyshev's inequality

$$P[|X-\mu| \geq \epsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

$$P[|X-\mu| < \epsilon] > 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

$$\epsilon=k\sigma \rightarrow P[|X-\mu|<k\sigma] \leq 1-\frac{1}{k^2}$$

Joint Distributions

$$f_{XY}=\sum_{x \in X}\sum_{y \in Y} f_{XY}(x,y)=1$$

$$f_X(x)=\sum_{y \in Y} f_{XY}(x,y)$$

$$f_Y(y)=\sum_{x \in X} f_{XY}(x,y)$$

$$f_{XY}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=1$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ iff indepentent

$$E[H(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)f(x,y)dxdy$$

$E[XY]=E[H(X,Y)],\ H(X,Y)=X*Y$

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf_{XY}(x,y)dxdy$$

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf_{XY}(x,y)dxdy$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}}$$

Sample statistics

$$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}$$

Median: $P[X \leq m]=P[X \geq m]=\frac{1}{2}$

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$$

$$=\frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1))}$$

$\sigma \sim$(estimated range)/4, normal

$\sigma \sim$(estimated range)/6, unkown

Unbiased: $E[\hat{\theta}]=\theta$

$$Var[\bar{X}]=\frac{\sigma^2}{2}$$

Confidence interval

$$(n-1)S^2/\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2$$

$\sim chi-squared(n-1)$

$$\frac{Z}{\sqrt{\chi^2_\gamma/\gamma}} \sim T_\gamma,\ \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim T_{(n-1)}$$

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right]$$

General: find $P[-D_{(\alpha/2)} \leq C \leq D_{(\alpha/2)}]$

σ^2 known, $\bar{x} \pm Z_{(\alpha/2)}\sigma\sqrt{n}, Z \sim N(0,1)$

σ^2 unknown, $\bar{x} \pm t_{\alpha/2}S/\sqrt{n}$

$$n=\frac{(Z_{\alpha/2})^2\sigma^2}{d^2}, n=\frac{(Z_{\alpha/2})^2\hat{\sigma}^2}{d^2}$$

Central limit theorem

For a sample of size n from distribution with mean μ Variance σ^2, when n is large $\bar{X}$ is approximately normal with mean μ Variance σ^2/n.

Hypothesis testing

$\alpha=P[\text{"type 1 error"}]=P[\text{"reject } H_0\text{"}|H_0]$

$\beta=P[\text{"type 2 error"}]=P[\text{"fail reject } H_0\text{"}|H_0^c]$

"Power of test"$=1-\beta$

Non parametric methods

Sign-test: Calculate median M on the sample of n. Then calculate $X_i-M$for$x_i \in X$. Let Q_+ denote the number of positive differences. $Q_+ \sim Bin(n,\frac{1}{2})$. Zeros are assigned two the sign that supports H_0

Wilcoxon rank-test: As befor calculate M and X_i-M order the list of differences from least to greatest. Number them 1 to N where 1 is the smalest difference. For equal difference assign the mean rank to each of them. Let W_+ denote the sum of positive ranks and W_- the negative ranks. $W=min(W_+,W_-)$ Lookup w in table or use normal approximation. This test can also be used for paired data, then use X_i-Y_i instead of X_i-M_x

$$E[W]=\frac{n(n+1)}{4}, Var[W]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

$$\alpha=W \leq c \text{ or } W \geq C, C=\frac{n(n+1)}{2}-c$$

$$W=\sum_{j=1}^{n} R_jI_j, \max W \rightarrow I_j=1.$$

Wilcoxon rank-sum test: Given two samples $X_1,X_2,...,X_n$ and $y_1,y_2,...,y_m$, $m \leq n$ pool them and order them from smalest to largest. Assign ranks from 1 to N+M, draws are each assigned the average rank. Let $W_m=$ the sum of all ranks beloning to y, the smaller sample. Let c denote the lower critical boundry left tailed tests and C the upper boundry. c is given i given in the table.

$$C=m(m+n+1)-c$$

$$E[W_m]=\frac{m(m+n+1)}{2}$$

$$Var[W_m]=\frac{mn(m+n+1)}{12}$$

Propotions

$$\hat{p}=\frac{X}{n},\ \hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$$

$$n=\frac{Z^2_{\alpha/2}\hat{p}(1-\hat{p})}{d^2}, \hat{p} \text{ estimate known}$$

$$n=\frac{Z^2_{\alpha/2}}{4d^2}, \text{ estimate unknown}$$

$$T=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

$$\widehat{p_1-p_2}=\frac{X_1}{n_1}-\frac{X_2}{n_2}$$

$$\widehat{p_1-p_2} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p_1}(1-\hat{p_1})}{n_1}+\frac{\hat{p_2}(1-\hat{p_2})}{n_2}}$$

When: $p_1=p_2, \hat{p_p}=\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}$

$$T=\frac{\hat{p_1}-\hat{p_2}}{\hat{p_p}(1-\hat{p_p})(1/n_1+1/n_2)}$$

$$n=Z^2_{\alpha/2}\frac{\hat{p_1}(1-\hat{p_2})+\hat{p_2}(1-\hat{p_2})}{d^2}$$

$$n=\frac{Z^2_{\alpha/2}}{2d^2}$$

Comparing means

$$\widehat{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}_1+\bar{X}_2\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

$$\frac{\chi^2_{\gamma_1}/\gamma_1}{\chi^2_{\gamma_2}/\gamma_2}\sim F_{\gamma_1,\gamma_2},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Comparing means:

Variance known:

$$T=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2)}}\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

Variance unknown:

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2, T=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{S_p^2(1/n_1+1/n_2)}}\sim T_{n_1+n_2-2}$$

$$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2, T=\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(S_1^2/n_1+S_2^2/n_2)}}\sim T_\gamma$$

$$\gamma=\frac{(S_1^2/n_1+S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

Linear regression

$$\mu_{Y|x}=\beta_0+\beta_1 x,\ Y|x_i=\beta_0+\beta_1 x_i+E_i$$

$$E_i\sim N(0,\sigma^2), Y|x\sim N(\mu_{Y|x},\sigma^2)$$

$$\text{SSE}=\sum_{i=1}^n e_i^2=\sum_{i=1}^n (y_i-b_0-b_1x_i)^2$$

$$\text{Minimize SEE:}\frac{dSEE}{db_0}=-2\sum_{i=1}^n (y_i-b_0-b_1x_i)$$

$$\frac{dSEE}{db_1}=-2\sum_{i=1}^n (y_i-b_0-b_1x_i)x_i$$

$$b_1=\frac{n\sum_{i=1}^n x_iy_i-\left(\sum_{x=i}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

$$b_0=\bar{y}-b_1\bar{x}, Y_i\sim N(\beta_0+\beta_1x_i,\sigma^2)$$

$$S_{xx}=\sum(x_i-\bar{x})^2,\ S_{yy}=\sum(Y_i-\bar{Y})^2$$

$$S_{xx}=\frac{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}{n}=\sum x_i^2-n\bar{x}^2$$

$$S_{xy}=(x_i-\bar{x})(Y_i-\bar{Y})=\sum(x_i-\bar{x})Y_i$$

$$S_{xy}=\frac{\left(n\sum x_iY_i-\sum x_i\sum Y_i\right)}{n}$$

$$b_1=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})Y_i}{S_{xx}}=c_1Y_1+\dots+c_nY_n$$

$$c_j=\frac{(x_j-\bar{x})Y_j}{S_{xx}},\ b_1\sim N\left(\beta_1,\frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right)$$

$$b_0\sim N\left(\beta_0,\frac{\sum x_i^2}{nS_{xx}}\sigma^2\right)$$

$$S^2=\hat{\sigma}^2=\frac{SEE}{n-2}=S_{yy}-S_{xx}b_1^2$$

$$T_{n-2}=\frac{b_1-\beta_1^0}{S/\sqrt{S_{xx}}}, b_1\pm t_{\alpha/2}S/\sqrt{S_{xx}}$$

$$T_{n-2}=\frac{b_0-\beta_0^0}{\left(\frac{S\sqrt{\sum x^2}}{\sqrt{nS_{xx}}}\right)}, b_0\pm t_{\alpha/2}S\sqrt{\frac{\sum x^2}{nS_{xx}}}$$

$$\hat{\mu}_{Y|x}\sim N\left(\mu,\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\right)$$

$$\hat{\mu}_{Y|x}\pm t_{\alpha/2}S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x}^2)}{S_{xx}}}$$

$$(\hat{Y}|x-Y|x)=(\hat{\mu}_{Y|x}-Y|x)$$

$$(\hat{Y}|x-Y|x)\sim N\left(0,\sigma^2\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\right)$$

$$T_{n-2}=\frac{\hat{Y}|x-Y|x}{S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}}}$$

$$\hat{Y}|x\pm t_{\alpha/2}S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x}^2)}{S_{xx}}}$$

Partial integration

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

Name	density	def	mgf	μ	σ^2
Gemetric	$(1-p)^{x-1}p$	$x\geq1$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$	p^-1	qp^{-2}
Uniform	$\frac{1}{n}$	$x=x_1\dots x_n$	$\frac{\sum_{i=1}^n e^{tx}}{n}$	$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2$
Binomial	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$x=0,1\dots,n$	$(q+pe^t)^n$	np	$np(1-p)$
Poisson	$\frac{e^{-k}k^x}{x!}$	$x=0,1,2,\dots$	$e^{k(e^x-1)}$	k	k
Exponential	$\frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}$	$x>0,\beta>0$	$(1-\beta t)^{-1}$	β	β^2
Uniform	$\frac{1}{b-a}$	$a<x<b$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)},\ t\neq0,1,\ t=0$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty<x<\infty$	$e^{\mu t+\sigma^2t^2/2}$	μ	σ^2
Chi-squared	$\frac{1}{\Gamma(\gamma/2)2^{\gamma/2}}x^{\gamma/2-1}e^{-x/2}$	$x>0$	$(1-2t)^{-\gamma/2}$	γ	2γ

Lecture notes SSY080

Lukas Rahmn

1 September 2017

Komplexa exponentialer, Steg funtionen, Enhetsimpulsen och System egenskaper

Komplexa exponentialer

$$\text{Kont: } x(t) = Ce^{at}$$
$$\text{Disk: } x[n] = Ca^{t}, \text{Allmänt: } C, a, x \in \mathbb{C}$$

Signalmodel

Fall 1 $C, a \in \mathbb{R}$ $a > 1 => $ funktionen ökar
$0 < a < 1 =>$ funktionen avtar
$a < 0$ teckenväxling i $x[n]$
Fall 2: $C, a \in \mathbb{C}$, men låt $|a| = 1$

$$a = 1 * e^{i\phi}$$
$$C = A * e^{i\phi}$$
$$x[n] = Ae^{i\pi} * e^{i\omega_0 * n} = Ae^{i(\omega_0 * n + \phi)} = Acos\omega_0 + \phi + jAsin\omega_0 + \phi$$

Fall 3: $C, a \in \mathbb{C}$

$$C = Ae^{i*\phi}$$
$$a = Be^{i*\Omega_0} = \{B = e^{\Sigma_0}\}e^{j\Omega + \Sigma_0}$$
$$x[n] = Ae^{j\phi} * e^{(j\Omega + \Sigma_0)n} = Ae^{\Sigma_0 * n} * e^{j(\Omega_0 + \Phi)}$$
$$x[n] = Ae^{\Sigma_0 * n}(cos(\Omega_0 * n + \Phi) + jsin(\Omega_0 * n + \Phi))$$

Enhetsteg (Kontinuerlig)

Def

$$u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Vi låter $u(0)$ vara odefinerad, andra definerar den som 0,1,eller $\frac{1}{2}$

Enhetsimpuls, $\delta(t)$ (Kontinuerlig)

Ingen vanlig funtion, en distribution"
Beskriving:

$$\delta(t) = t, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

En oändligt "kortsignal men en oändligt högämplitud. Amplituden vid $t = 0$ är ej begränsad. Man kan tänka sig $\delta_\epsilon(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$ och $\delta(t) = lim_{\epsilon->0}\delta_\epsilon(t)$ Enhetsimpulen defineras futifrån sina egenskaper, ej sina amplitudvärden. Låt f(t) vara en godtycklig signal (funktion) som är kontinuelig för $t = t_0$ Då är $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$ och vidare

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Samband Enhetsteg och Enhetsimpuls (Kontinuerlig)

Samband

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau$$

Diskret enhetsteg

$$u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

Diskret enhetsimpuls

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

Samband Enhetsteg och Enhetsimpuls (Diskret)

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$
$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]$$

System

En process där det finns ett samband mellan örsak och verkan "
Orsak, insignal
verkan, utsigal

Systemegenskaper

Tidsinvariant, TI

För ett TI system gäller

Insignal	Utsignal
$x(t)$	$y(t)$
$x(t-t_0)$	$y(t-t_0)$

Tidsinvariant om:

$$y(t-t_0) = y_d(t)$$
$$x(t)->\text{system}->\text{Delay } t_0->y(t-t_0)$$
$$x(t)->\text{Delay } t_0->\text{System}->y_d(t)$$

Linjärt

För linjärt system gäller

Insignal	Utsignal
$x(t)$	$y(t)$ *a konstant, Homogent*
$ax(t)$	$ay(t)$
$x_1(t)$	$y_1(t)$
$x_2(t)$	$y_2(t)$
$x_1(t)+x_2(t)$	$y_1(t)+y_2(t)$ *Additivt*
$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+...$	$a_1y_1(t)+a_2y_2(t)+...$ a_i *är konstanter, superposition*

Äddititvt"+ "Homogen-> Linjärt

Kausalt

$$x(t)->\text{System}->y(t)$$

Ett system är kausalt om utsignalen $y(t)$ endast beror av samtida och/eller tidigare värden på insignalen, $x(t-t_0), t_0 \geq 0$. Alla fysikaliska system är kausala.

Minne (Dynamiskt)

Ett system har minne om dess utsignal vid tidpunkten t_0 beror på fler insignal värden än $x(t_0)$.

Ex. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Minneslöst system (Statiskt)

Utsignal beror endast på det samtida insignalvärdet.

Ex.

$$y(t) = kx(t)$$
$$y[n] = x[n]^2$$

Studera egenskaper för det diskreta fallet i kursboken.

Lecture notes

Lukas Rahmn

5 September 2017

I kursen studerar vi LTI-system (Linjära,Tids Invarianta system). Ett vanlig sätt att karakterisera ett system är att ange dess utsignal för en given (och känd insignal). För insignalen $x(t)$, en enhetsimpuls blir signalen $y(t) = h(t)$ systemets impuls respons. Motsvarande samband fås för ett diskret system. Insignalen $x[n] = \delta[n]$ ger utsignal $y[n] = h[n]$, systemets impuls svar

Samband mellan insignal och utsignal för ett LTI-system

- *Diskret fall:* Antag att vi känner impulssvaret till ett diskret LTI-system. $x[n]$ är en godtycklig insigan (diskret). Bilda produkten $x[n] \cdot \delta[n] = x[0] * \delta[n]$ av insignalen och därefter produkten $x[n] \cdot \delta[n-k] = x[k] \cdot \delta[n-k]$.

  Tydligen kan vi teckna x[n] som en summa av viktade och skiftade enhetsimpulser.

  $$x[n] = ...x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + ...$$
  $$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

  För ett LTI-system gäller:

Insignal	Utsignal
$\delta[n]$	$h[n]$ *impulssvar*
$\delta[n-k]$	$h[n-k]$ *TI*
$x[k]\delta[n-k]$	$x[k]h[n-k]$ *Homogent*
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$	$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ (*faltningsumma*)

  Förenklat skrivsätt $y[n] = x[n] * h[n]$.
  Genom en variabelsubstitution kan man visa att

  $$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

  och alternativt

  $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- *Kontinuerligt fall:* Antag att vi känner impulssvaret h(t) till ett kontinuerligt LTI-system. Låt x(t) vara en godtycklig insignal. Dela in signalen i rektanglar med bredd ϵ och höjd $x(\epsilon k)$. $\hat{x}(t)$ utgör denna approximation av $x(t)$ där $\hat{x}(t)$ är summan av pulserna. Vi definerar en enhetspuls som

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, 0 \leq t < \epsilon \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$$

Våra pulser kan vi nu teckna som

$$\begin{aligned}
x_{-1} &= \delta_\epsilon(t+\epsilon)x(-\epsilon)\epsilon \\
x_0 &= \delta_\epsilon(t)x(0)\epsilon \\
x_1 &= \delta_\epsilon(t-\epsilon)x(\epsilon)\epsilon \\
x_2 &= \delta_\epsilon(t-2\epsilon)x(2\epsilon)\epsilon \\
&\vdots \\
\hat{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon
\end{aligned}$$

Låt $h_\epsilon(t)$ vara systemets utsignal för insignalen $\delta_\epsilon(t)$ (pulssvar). För ett LTI system gäller

Insignal	Utsignal
$\delta_\epsilon(t)$	$h_\epsilon(t)$
$\delta_\epsilon(t-k\epsilon)$	$h_\epsilon(t-k\epsilon)$
$\delta_\epsilon(t-k\epsilon)$	$h_\epsilon(t-k\epsilon)$
$\delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$	$h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$
$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$	$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\epsilon(t-k\epsilon)x(k\epsilon)\epsilon$

$$\begin{aligned}
&\text{Låt } \epsilon \to 0 \\
&\delta_\epsilon(t) \to \delta(t) \\
&h_\epsilon(t) \to h(t) \\
&k\epsilon \to \tau \text{ En kontinuerlig variabel} \\
&\epsilon \to d\tau \\
&\sum \to \int \\
&\hat{x}(t) \to x(t) \\
&\hat{y}(t) \to y(t)
\end{aligned}$$

Vi får

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

Förenklat skrivsätt $y(t) = h(t) * x(t)$. Genom en variabel subsition kan man visa att $h(t) * x(t) = x(t) * y(t)$ vilket ger

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Systemegenskaper kopplad till impulssvaret

- *Kausalt LTI-system*
  Diskret fall $h[k] = 0$ för $k < 0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

  Kontinuerligt fall, $h(t) = 0, t < 0$

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- *Stabilt system* Diskret system Antag $|x[n]| < M_x < \infty, \forall n \rightarrow$ Begränsad insignal

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

  Notera triangle olikheten $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \cdot |x[n-k]|$$

  men $|x[n-k] \leq M_x$

$$|y[n]| \leq M_x \sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]|$$

  Med $|y[n]| < \infty, \forall n$ krav för stabilitet följer villkoret om

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

  Absolut summerbart impulssvar!
  Motsvarande gäller för ett kontinuerligt och stabilt system

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Lecture notes

Lukas Rahmn

7 September 2017

Repetion

- LTI-System $y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ (faltning)
- BIBO-stabilit: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < +\infty$
- Kausalitet:$h(t) = 0, \forall t < 0$

Exempel

$h_{+}(t) = e^{\alpha t}u(t), h(t) = e^{\alpha t}u(t), u(t) :=$ steg funktionen
Stabilitet för $y\pm = h_{\pm} * x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{0}^{\infty} e^{\alpha t}dt = \begin{cases} \infty, \alpha \geq 0 \\ \frac{1}{\alpha}, \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-infty}^{0} e^{\alpha t}dt = \begin{cases} \infty, \alpha \leq 0 \\ \frac{1}{\alpha}, \alpha < 0 \end{cases} \quad => \text{(Stabilitet om } \alpha > 0)$$

Exempel 2 Kausalitet

h_{+} kausal, h_{-} ej kausal

LTI-system och ODE

Kausalt LTI-system $y(t) = (h * x)(t)$ Antag att för snälla", s.a. $x(t) = 0, \forall t < 0$, så uppfyller y och x en ODE med <u>konstanta</u> koefficienter.

Problem: kan vi återskapa h från ODE:n?

Ex.

$$\begin{aligned}
&y(t) = (h * x)(t) \text{ [Kausalt]} \\
&y'(t) - 3y(t) = x(t), x(t) = 0 \forall t < 0 \\
&\text{Lösning (Integrerande faktor)} \\
&(y'(t) - 3y(t))e^{-3t} = x(t)e^{-3t} \\
&(y(t)e^{-3t})' = x(t)e^{-3t}
\end{aligned}$$

Kausalt ger $y(t) = 0, \forall t < 0$

$y(t)e^{-3t} = \int_0^t (y(\tau)e^{-3\tau})' d\tau = \int_0^t x(\tau)e^{-3\tau} d\tau => y(t) = \int_0^t x(\tau)e^{3(t-\tau)} d\tau$

Inför $h(t) = e^{3t}$ kom ihåg, $x(t) = 0, \forall t < 0$

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = (h * x)(t)$

där $h(t) = e^{3t}u(t)$

Är systemet stabilt? Nej $h = h_+, \alpha = 3 \to$ Ej stabilt!

Mer allmänt $y' - \alpha t = x \to y(t) = (h_\alpha * x)(t), h_\alpha = e^{\alpha t}u(t)$.

Exempel

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x \\ x(t) = 0, \forall L < 0, \to_{\text{kausalitet}} y(t) = 0, \forall t < 0 \end{cases}$$

Observera

$$y'' - 3y' + 2y = (y' - y)' - 2(y' - y) = x$$

Inför $z = y' - y,$ s.a. $z' - 2z = x$

$z = h_2 * x \to y' - y = z \to_{h_\alpha(t)} y = h_1 * z \to y = h_1 * (h_2 * x) = (h_1 * h_2) * x \to y = h * x, h = h_1 * h_2$

Övning

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau)h_2(\tau)d\tau = \int_0^t e^{t-\tau}e^{2\tau}d\tau$$

Allmän strategi (Kausalt LTI-system)

$y = h * x, y^(n) + a_{n-1}y^{n-1} + ... + a_1 y^1 + a_0 * y = x, x(t) = 0, \forall t < 0$

Karakteristiska ekvationen: $\tau^n + a_{n-1} * \tau^{n-1} + ... + a_1\tau + a_0 = 0$

Rötter (Möjligen komplexa): $\tau_1, \tau_2, ..., \tau n \to h_{\tau_k(t)} = e^{\tau_k t}u(t)$

$\to h(t) = (h_{\tau_1} * h_{\tau_2} * ... * h_{\tau_n})$

T.ex: $y^(2) - 3y^(1) + 2y = X \to \tau^2 - 3\tau + 2 = 0 \to \tau_1 = 1, \tau_2 = 2 \to h = h_1 * h_2$

LTI system och differans elvationer

Kausalt LTI-system,diskret tid, $y[n] = (h * x)[n]$ Antag att för alla x med $x[n] = 0, \forall n < 0$, så uppfyller y och x en DIE med konstanta koefficienter.

Kan vi återskapa $h[t]$ från DIE

Se kapitel 10.4 till 10.7

Exempel

- Finn h om

$$\begin{cases} y[n] - ay[n-1] = x[n] \\ x[n] = 0, \forall n < 0 \end{cases}$$

- Lösning: (Kausalitet ger $y[n] = 0, \forall n < 0$)

  $y[0] = x[0]$
  $y[1] = a \cdot y[0] + x[1] = ax[0] + x[1]$
  $y[2] = a \cdot y[1] + x[2] = a(a \cdot x[0] + x[1]) + x[2] = a^2 \cdot x[0] + a \cdot x[1] + x[2]$
  $\vdots$
  $y[n] = a^n \cdot x[0] + a^{n-1} \cdot x[1] + \cdots + x[n] = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \cdot x[k]$

  Inför:

$$h_a[n] = a^n \cdot u[n], u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a[n-k]x[k] = (h * x)[n]$$

  Är systemet stabilt? Alltså:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_a[k]| < +\infty$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a|^n = \begin{cases} \infty, |a| \geq 1 \\ \frac{1}{1-|a|}, |a| < 1 \end{cases}$$

Exempel högre ordningens differens ekvationer

- Finn h om

$$\begin{cases} y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] \\ x[n] = 0, \forall n < 0 \end{cases}$$

- Lösning:

$$\begin{aligned} &y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] \\ =&(y[n] - y[n-1]) - 2(y[n-1] - y[n-2]) \\ =&z[n] - 2z[n-1] \\ &z = h_2 * x \to y[n] - y[n-1] = z[n] \\ &y = h_1 * z = h_1 * (h_2 * x) = (h_1 * h_2) * x = h * x \end{aligned}$$

Allmän strategi: Kausalt LTI:

$$y = h * x \begin{cases} y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_k y[n-k] = x[n] \\ x[n] = 0, \forall n < 0 \end{cases}$$

Karakteristiska ekvation $\tau + a_1 \tau^{n-1} + \cdots + a_k = 0$

Rötter $\tau_1, \ldots, \tau_n$

Lecture notes

Lukas Rahmn

Fourieranalys, 5.3 to 4.1

Repetion

LTI-system, $y(t) = (h * x)(t) = \int_{-infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$

Stabilitet $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < +\infty$ (Antags närmaste veckan)

Inledning

Fundamental observation Om $X_\omega(t) = e^{j\omega t}, \omega \in \mathbb{R}, j^2 = -1$

så gäller $y_\omega(t) = (h * x_\omega)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{j\omega(\tau-t+t)}d\tau$

$\int_{-\infty}^{\infty} h(-\tau)e^{j\omega(-t)}d\tau \cdot e^{j\omega t} = H(j\omega) \cdot X_\omega(t)$

$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega t}d\tau$

$H(j\omega)$ oberoende av t

Således: x_ω egenvektor till LTI-system, $y = Sx = h * x$ med egen värde $H(j\omega)$

Exempel

- Kan vi hitta ett stabilt h s.a. $x(t) = e^{jt}$ ger $y(t) = 5e^{3jt}$?
- Lösning. Observera $x = x_1, (\omega = 1)$. Om h existerar så gäller $y(t) = H(j1) * e^{jt} \underset{?}{=} 5e^{3jt}$ Omöjligt!

Tidskontinuerlig Fourietransform (CTFT)

Om $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uppfyller $\int_{-i\infty}^{\infty} |x(t)|dt < +\infty$ så defineras dess Fouriertransfrom X enligt $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \omega \in \mathbb{R}$

Egenskaper:

- X begränsad och kontinuerligt
- X bestämmer x entydligt, (nästan överallt)

Exempel

- $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$ Beräkna X
- Lösning:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt = \left[-\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{\alpha+j\omega} \right]_{t=0}^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\alpha+j\omega} \right) = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

Fundamental likhet

Om $h, x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ upfyller $\int_{-\infty}^{\infty} |h|, \int_{-\infty}^{\infty} |x| < +\infty$ och $y = h * x$ så gäller

- $\int_{-\infty}^{\infty} |y| < +\infty$
- $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$ (Fundamental likhet!!)

Faltning motsvarar multiplikation av fourietransformen

Bevis av fund likhet.

$$
\begin{aligned}
Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)e^{-j\omega(t-\tau+\tau)d\tau dt} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega t}dt x(\tau)e^{-j\omega t}d\tau = H(j\omega)\cdot X(j\omega)
\end{aligned}
$$

Typisk tenta uppgift (TTU)

- Bestäm alla stabila LTI-system $y = h * x$, så att $x(t) = e^{-t}u(t)$ ger utsignalen $y(t) = te^{-2t}u(t)$.
- Lösning: Fundamental likhet: $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \to H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

$$
\begin{aligned}
&X(j\omega) = \{\alpha = 1\} = \frac{1}{1+j\omega} \\
&Y(j\omega) = \int_0^{\infty} te^{-2t}e^{j\omega t}dt = \int_0^{\infty} t\cdot e^{-(2+j\omega)t}dt \\
&\text{partiell integration} = \left[-t\cdot\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{2+j\omega}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1\cdot\frac{e^{-(2+j\omega)tdt}}{2+j\omega} \\
&= \frac{1}{(2+j\omega)^2} \\
&H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1+j\omega}{(2+j\omega)^2} = \frac{2+j\omega-1}{(2+j\omega)^2} \\
&= \frac{1}{2+j\omega} - \frac{1}{(2+j\omega)^2} \to \\
&\to h(t) = e^{-2t}u(t) - t^{-2t}u(t) = (1-t)e^{-2t}u(t)
\end{aligned}
$$

Räkneoperationer med CTFT

- $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \equiv X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$

- $z(t) = t \cdot x(t) \equiv Z(j\omega) = j \cdot X'(j\omega)$

  Bevis: $Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot x(t) e^{-j\omega t} dt = j \dfrac{d}{d\omega} \int_{-i\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = jX'(j\omega)$

  Ex: Vet $x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \equiv X(j\omega) = \dfrac{1}{\alpha + j\omega}$

  $x_1(t) = te^{-\alpha t} u(t) = t \cdot x(t) \equiv Z_1(j\omega) = jX'(j\omega) = j \cdot \dfrac{-j}{(\alpha + j\omega)^2} = \dfrac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$

  $z_2(t) = t^2 \cdot x(t) \to Z_2(j\omega) = j^2 \cdot X''(j\omega) = \dfrac{2}{(\alpha + j\omega)^3}$

- $z(t) = x(t - t_0) \equiv Z(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
- $z(t) = x(-t) \equiv Z(j\omega) = X(-j\omega)$
- $z(t) = x(a \cdot t) \equiv Z(j\omega) = \frac{1}{|a|} X(j\omega/a), a \neq 0$

Exempel

- $z(t) = e^{4t} u(1 - 2t)$ Bestämm CTFT
- Lösning: $z(t) = w(-2t)$, där $w(t) = e^{-2t} u(t + 1)$

  $w(t) = e^{-2(t+1-1)} u(t+1) = e^2 v(t+1), v(t) = e^{-2t} u(t) \quad V(j\omega) = \{\alpha = 2\} = \dfrac{1}{2 + j\omega} \to$

  $W(j\omega) = e^2 \cdot e^{j\omega} V(j\omega) = \dfrac{e^{2+j\omega}}{2 + j\omega}$

  $Z(j\omega) = \dfrac{1}{|-2|} \cdot V(-j\omega/2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{2-j\omega/2}}{2 - j\omega/2}$

Lecture notes

Lukas Rahmn

12 September 2017

- Continouse time fourie transfrom
- Rep + Continouse time fuirie series
- Energi + Rep

Repition

$x : \mathbb{R} -> \mathbb{C}, \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

Så defineras dess fourie transform $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}, \omega \in \mathbb{R}$

Kan referera till ω som frekvens

Egenskaper för fourie transfrom

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \rightarrow X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

X bestäms entydligt av x. Om $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| d\omega < \infty$ så gäller

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \forall t \in \mathbb{R}$$

Viktiga transformer

- $y = h * x \iff Y = H \cdot X$
- $z(t) = x(t - t_0) = Z(j\omega) = e^{-j\omega t} X(j\omega)$
- $x(t) = t^n \cdot e^{-at} u(t), a > 0 \iff X(j\omega) = \frac{(n-1)!}{(a+j\omega)^n}$

Exempel

- Stabilt LTI-system $y = h * x$. Antag att

  $$x(t) = e^{-2t} u(t)$$

  ger

  $$y(t) = 2te^{-3t} u(t)$$

  Om $x(t) = e^{-3t} u(t)$ Vad blir y?

- Lösning:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

I vårt fall: $X(j\omega) = \dfrac{1}{2 + j\omega}$

$$Y(j\omega) = \frac{2}{(3+j\omega)^3} \to H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\frac{2}{(3+j\omega)^3}}{\frac{1}{2+j\omega}}$$

$$=2 \cdot \frac{2+j\omega}{(3+j\omega)^2} = 2 \cdot \frac{3+j\omega-1}{(3+j\omega)^2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{(3+j\omega)^2}\right) = H_1(j\omega) - H_2(j\omega)$$

Bestäm h

$$H = 2(H_1 - H_2) \to h = 2(h_1 - h_2)$$
$$h_1 = e^{-3t}u(t), (3, n = 1, a = 3)$$
$$h_2 = te^{-3t}u(t), (3, n = 2, a = 3)$$
$$h(t) = 2e^{-3t}(1-t)u(t)$$

Om nu

$$x(t) = e^{-3t}u(t) \to X(jw) = \frac{1}{3+j\omega}$$

$$Y(jw) = H(j\omega) \cdot \frac{1}{3+j\omega} = \frac{2}{(3+j\omega)^2} - \frac{2}{(3+j\omega)^3} = Y_1(j\omega) - Y_2(j\omega)$$

$$\to y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$
$$y_1(t) = 2te^{-3t}u(t)$$
$$y_2(t) = t^2e^{-3t}u(t), (3, n = 3, a = 3)$$
$$\to y(t) = 2t^{-3t}u(t) - t^2e{-}3tu(t) = te^{-3t}(2-t)u(t)$$

Fourieserier

Stabilt LTI-system $y = h * x$

$$\int_{-infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

OBS: Om x är T-periodisk alltså $x(t+T) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$. så blir också utsignalen T-periodisk.

$$y(t-T) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t+T-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = (h*x)(t) = y(t)$$

Kom ihåg $x_\omega(t) = e^{j\omega t} \to y(t) = H(j\omega)x_\omega(t)$.

$$x_w \text{ T-periodisk} \iff \omega = \omega_k = \frac{2\pi k}{T}, \text{k heltal}$$

$$x_{\omega_k}(t+T) = e^{j\omega_k(t+T)} = e^{j\omega_k t} \cdot e^{j\omega_k T} = e^{j\omega_k t} = x_\omega(t)$$

Defintion: Om $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodisk och

$$\int_0^T |x(t)|dt < \infty$$

så ddefineras dess fourierseriekoeff (c_k) enligt

$$c_k(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}dt, \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

Egenskaper

- $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 (x_1, x_2$ T-periodiska$) \to c_k(x) = \alpha_1 c_k(x_1) + \alpha_2 c_k(x_2)$.
- x bestämms entydligt av c_k. Explicit:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty \to x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{j\omega_k t}\forall t \in \mathbb{R}$$

  Exempel

  - $x(t) = cos(2t)$ Vad är c_k? $[T = \pi]$
  - Lösning: Alternativ 1

$$c_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi cos(2t)e^{-j\frac{2\pi k}{\pi}t}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(e^{2jt} + e^{-2jt}) \cdot e^{-2jkt}dt$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{2jt(1-k)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-j2t(1+k)}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{2jt(1-k)}}{2j(1-k)}\right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-e^{-j2t(1+k)}}{j2(1+k)}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\frac{1-1}{2j(1-k)}) = 0, k \neq 1, -1$$

$$c_1(x) = 1/2, c_{-1}(x)1/2$$

$$c_k(x) = \begin{cases} 0, k \neq 1, -1 \\ 1/2, k = 1, -1 \end{cases}$$

$$x(t) = c_{-1}(x) \cdot e^{j\omega_{-1}t} + c_1(x) \cdot e^{j\omega_1 t} = \frac{1}{2}(e^{-j2t} + e^{j2t}) = cos2t$$

  Alternative 2:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} = c_{-1}(x)e^{j\omega_{-1}t} + c_1(x)e^{j\omega_1 t}$$

  Exempel: Bestämm c_k om $x(t) = sint + cos3t$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt}) + \frac{1}{2}(e^{3jt} + e^{-3jt}) \\ \omega_k = \frac{2\pi k}{2\pi} = k \end{cases} \to c_k(x) = \begin{cases} 1/2j, k = 1 \\ -1/2j, k = -1 \\ 1/2, K = \pm 3 \\ 0 \end{cases}$$

Fundamentalt samband

Om x är T-periodisk så gäller,

$$c_k(y) = H(j\omega)c_k(x)\forall k, \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

Exempel

Antag

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} coskt$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} (1 - 2|\omega|)^{17}, |\omega| < 1/2 \\ 0, \text{övrigt} \end{cases}$$

Bestäm y. Lösning $[T = 2\pi.\omega_k = k]$

$$c_k(y) = H(j\omega_k) \cdot c_k(x) = \begin{cases} 0, k \neq 0 \\ c_0(x) = 1/2, k = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{jkt} = \frac{1}{2} \forall t$$

Lecture notes

Lukas Rahmn

13 September 2017

Repition

CTFT

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \omega \in \mathbb{R}$$

Egnenskaper:

- $y(t) = h(t) * x = Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$
- $z(t) = x'(t) \to Z(j\omega) = j\omega X(j\omega)$
- $z(t) = x(t - t_0) \to Z(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

Plancharels formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Energin av en signal

$$x := \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Två signaler x_1 och x_2 är nära om

$$int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt \tag{1}$$

är liten. Formel (1) kallas energi avstånd.

Planchel

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(j\omega) - X_2(j\omega)|^2 d\omega$$

I denna kurs: lågpass filter $y = h * x$

$$H(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_0$$
$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) = 0, \forall |\omega| > \omega_0$$

Specialfall

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| < \omega_0 \\ 0, \text{ övrigt} \end{cases} \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{t}$$

Vill jmfära:

$$E(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega) - H(j\omega)X(j\omega)|^2 d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| > \omega_0}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Mäter bortfiltrerad del.

Ex Fix $\epsilon > 0, x(t) = e^{-t}u(t)$ Bestäm minimalt $\omega_0 > 0$ så att

$$E(x, x_{\text{bortfilltrerat}}) \leq \epsilon$$

Lågpassfiltrera

$$H(j\omega) \begin{cases} 1, |\omega| < \omega_0 \\ 0 \end{cases}$$

Lösning: Bestämm $\omega_0 > 0$ s.a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|w| \geq \omega_0} |X(j\omega)|^2 d\omega < \epsilon$$

I vårt fall: $X(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega} \rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \geq \omega_0} \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega \textit{ Jämn funktion}$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{w_0}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} [\arctan(\omega)]_{\omega_0}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_0) \right) < \epsilon$$

Bestäm minimalt ω_0 så att detta uppfylls

CTFS

Krav

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x(t + T) = x(t), \forall t \in R$$
$$\int_0^T |x(t)| dt < \infty$$

Definition

$$c_k(x) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\omega_k t} dt, \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

Egenskaper

- $y = h * x, xT - periodisk \rightarrow c_k(y) = H(j\omega_k) \cdot x_k(x), \forall$
- $z(t) = x'(t) \rightarrow c_k(z) = j\omega_k c_k(x)$
- $z(t) = x(t - t_0) \rightarrow c_k(z) = e^{-j\omega_k t_0} c_k(x)$

Parsevals formel

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 \tag{2}$$

Exempel

- Beräkna c_k om $x(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t \leq 1 \\ -11 < t < 2 \end{cases}$ där $x(t+2) = x(t) \forall t, \rightarrow$ $T = 2$
- Lösning

  $c_k(x) = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t) \cdot e^{-j\omega_k t} dt = \{\omega_k = \pi k\} = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1 \cdot e^{-j\pi k t} dt + \int_1^2 (-1) \cdot e^{-j\pi k t} dt\right)$
  $= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{-e^{-j\pi k t}}{j\pi k}\right]_0^1 + \left[\frac{-e^{-j\pi k t}}{j\pi k}\right]_1^2\right)$
  $= \frac{1}{2j\pi k}\left(-e^{-j\pi k} + 1 + e^{-j\pi k 2} - e^{-j\pi k}\right) = \frac{1}{2j\pi k}(2 - 2e^{-j\pi k})$
  $= \frac{1}{j\pi k}(1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0,\ k \text{ jämn } (k \neq 0) \\ \frac{2}{j\pi k},\ k \text{ udda } (k \neq 0) \end{cases}$

  Beräkna även $c_0(x)$

  $$c_0(x) = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t) dt = 0$$

  Slutligen

  $$c_k(x) = \begin{cases} 0,\ k \text{ jämn} \\ \frac{2}{j\pi k},\ k \text{ udda} \end{cases}$$

  Parseval

  $|x(t)|^2 = 1, 0 \leq t < 2$
  $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1 =_{parseval} \sum_{\text{k udda}} \frac{4}{\pi^2 k^2} = 2 \sum_{\text{k udda } k>0} \frac{4}{\pi^2 k^2}$
  $\rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \dots$

Exempel 2

- Antag att $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är 2-periodisk. på formen ... *Vacker bild på grafen av x här* ... Beräkna

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot k^2$$

Den vackra bilden ger $T = 2, \omega_k = \frac{2\pi k}{2} = \pi k$

Föreläsaren ritade faktiskt en bild, men har inte ritplattan med mig

- Observera

$$|c_k(x)|^2 k^2 = \frac{1}{\pi^2} |\pi k c_k(x)|^2 = \frac{1}{\pi^2} |j\omega k \cdot c_k(x)|^2 = c_k(x')$$

En till vacker bild här, fortfarande ingen ritplatta

Parseval:

$$\sum k^2 |c_k(x)|^2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x')|^2 = \frac{1}{2} \int_0^2 |x'(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} 4dt = 2$$

Exempel 3

- LTI-system

$$y = h * x, H(j\omega) = \begin{cases} 1 - |\omega|, |\omega| \leq 1 \\ 0, |w| > 1 \end{cases}$$

Om $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{jkt}$ vad blir y= 2π-periodisk

- Lösning:

$$c_k(y) = H(j\omega_k) c_k(x), \omega_k = \frac{2\pi k}{2\pi} 0k$$

$$H(j\omega_k) = H(jk) = \begin{cases} 0, k \neq 0 \\ 1, k = 0 \end{cases} \qquad \to c_k(y) = \begin{cases} 0, k \neq 0 \\ c_(x), k = 0 \end{cases}$$

$$c_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, \forall k \geq 0 \\ 0, k < 0 \end{cases}$$

$$\to y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{jkt} = 1$$

Lecture notes
Lukas Rahmn

Tenta räkning,

Del A, 5/10, Del B, 7/15

Del A

Uppgift A1

$$x(t) = cos(300t), h(t) = 600e^{-\sqrt{3}\cdot 100t}u(t)$$

Bestäm $y = h * x$, (1p)

Lösning:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}(e^{j300t} + e^{-j300t}) \\
y(t) &= \frac{1}{2}H(j300)e^{j300t} + \frac{1}{2}H(-j300)e^{-j300t} \\
H(j\omega) &= 600\frac{1}{\sqrt{3}\cdot 100 + j\omega} \rightarrow, \textit{(Tabell värde)} \\
y(t) &= \frac{1}{2}600 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 100 + j300}e^{j300t} + \frac{1}{2}600\frac{1}{\sqrt{3}\cdot 100 - j300} \cdot e^{-j300t}
\end{aligned}$$

Uppgift A2

Bestäm (c_k) om $x(t) = 5 + 2 \cdot \cos(500t + \pi/6)$ Lösning: $[T = \frac{2\pi}{500} = \frac{\pi}{250}]$

$$\begin{aligned}
x(t) &= 5 + 2 \cdot \frac{1}{2}(e^{j(500t+\pi/6)} + e^{-j(500t+\pi/6)}) \\
=& e^{-j\pi/6} \cdot e^{-j500t} + 5 \cdot \{e^{j\omega_0 t} = 0\} + e^{+e^{j\pi/6}e^{j500t}}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
c_1(x) = e^{-j\pi/6} \\
c_0(x) = 5 \\
c_1(x) = e^{j\pi/6} \\
c_k(x) = 0, k \neq 0, \pm 1
\end{cases}$$

24 Aug /16

Uppgift 4

$$T = 2\pi \cdot 10^{-2}s$$
$$x(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < T/2 \\ -1, T/2 \leq t < T \end{cases}$$
$$x(t+T) = x(t), \forall t$$
$$\text{Lågpassfilter:} y = h * x, H(j\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| < 420 \text{ rad}/20 \end{cases}$$

Jämför medelenergierna för x och y. Lösning:

$E_T = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt$

$$E_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = 1$$
$$E_T(y) = \frac{1}{T}\int_0^T |y(t)|^2 dt =$$
$$\{\text{Parseval}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(y)|^2 = \{c_k(y) = H(j\omega_k)c_k(x), \omega_k = \frac{2\pi k}{T}\} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |H(j\omega_k)|^2 \cdot |c_k(x)|^2 \neq \underline{\text{omm}} |w_k| = \frac{2\pi|k|}{T} < 420 \iff$$
$$|k| < \frac{420T}{2\pi} = 4.2 \iff k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$
$$= \sum_{k=-4}^{4} |c_k(x)|^2$$
$$c_x(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} e^{-j\omega_k t}dt - \int_{T/2}^{T} e^{-j\omega_k t}dt\right)$$
$$= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{-e^{-j\omega_k t}}{j\omega_k}\right]_{t=0}^{T/2} - \left[\frac{e^{-\omega_k t}}{j\omega_k}\right]_{t=T/2}^{T}\right)$$
$$= \frac{1}{j\omega_k T}\left(-e^{-j\omega_k T/2} + 1 - \left(-e^{-j\omega_k T} + e^{-j\omega_k T/2}\right)\right) =$$
$$= \left\{\omega_k T/2 = \frac{2\pi k}{T} T/2 = \pi k, \omega_k T = 2\pi k, e^{-j\omega_k T} = 1, e^{-j\omega_k T/2} = (-1)^k\right\}$$
$$= \{k \neq 0\} = \frac{1}{2\pi jk}(2 - 2\cdot(-1)^k) = \begin{cases} 0, k = 2n, n \neq 0 \\ \frac{2}{\pi jk}, k = 2n+1 \end{cases}$$

$c_0(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = 0 \rightarrow$
$\begin{cases} 0, k = 2n, n \neq 0 \\ \frac{2}{\pi jk}, k = 2n+1 \end{cases}$
$\rightarrow E_T(y) = \sum k = -4^4|c_k(x)|^2 = |c_{-1}(x)|^2 + |c_1(x)|^2 + |c_{-3}(x)|^2 + |c_3(x)|^2 =$
$2 \cdot \frac{4}{\pi^2} + 2 \cdot \frac{4}{9\pi^2} = \frac{80}{9\pi^2} < 1$

31 okt/14

Uppgift 5

LTI-system $y = h * x$, $h(t) = \delta(t) + (\cos t + 2\sin t)u(t), x(t) = e^{-2t}u(t)$
Bestäm y, (5p)
Lösning:

Angående δ: $(\delta * z)(t) = z(t), \forall t, \forall z$
CTFT av $\delta \equiv 1$

$$h(t) = \delta(t) + h_0(t) \rightarrow h * x = \delta * x + h_0 * x = x + h_0 * x$$
$$h_0(t) = (\cos t + 2\sin t)u(t) \textit{ Ej integrerbar (CTFT ej def)}$$
$$h_0(t) = (\alpha e^{jt} + \beta e^{-jt})u(t)$$

$$(h_0(t) * x)(t) = \begin{cases} \int_0^t (\alpha e^{j\tau} + \beta e^{-j\tau})e^{-2(t-\tau)}d\tau, t > 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$= \alpha(\int_0^t e^{\tau(j+2\tau)}d\tau)e^{-2t} + \beta\int_0^t e^{-\tau(j-2\tau)}e^{-2t}, t > 0$$

$$A = \left[\frac{e^{\tau(j+2)}}{j+2}\right]_0^t = \frac{1}{2+j}(e^{(2+j)t} - 1)$$
$$B = \left[\frac{-e^{\tau(j-2)}}{j-2}\right]_0^t = \frac{1}{2-j}(e^{-(2-j)t} - 1)$$
$$(h_0 * x)(t) = \frac{\alpha}{2+j}(e^{(2+j)t} - 1)e^{-2t}u(t) + \frac{\beta}{2-j}(e^{-(2-j)t} - 1)e^{-2t}u(t)$$

26 Okt/15

$$y = h * x, H(j\omega) = \frac{400}{20 + j\omega)^2}$$
$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(\frac{n\pi t}{L})$$
$$L = \frac{\pi}{10} \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi t}{L}$$

Bestäm $|B_n|$ för de 3 första nollskilda termerna.

Lösning:

$$c_k(y) = H(j\omega_k)c_k(x), \omega_k = \frac{2\pi k}{2L} = \frac{\pi k}{L}$$

Observationer: x reell signal.

$$c_k(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}dt \to \bar{x}_k(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{j\omega_k t}dt = c_{-k}(x)$$
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{j\omega_k t} = [c_0(y) = 0]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(c_k(y)e^{j\omega_k t} + c_{-k}(y)e^{-j\omega_k t})$$

$h(t) = 400te^{-20t}u(t)$ tabell värde

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n + 1}{n}\left(\frac{e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}}{2j}\right)$$

Tiden gick ut, så föreläsaren hänvisar till kurshemsidan

Lecture notes

Lukas Rahmn

19 September 2017

Fourierrepresentation

- Kontinuerliga signaler.
  Byggsten : $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$
- Periodiska signaler (Kontinuerliga), $x(t) = x(t+\tau)$
  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$ En viktad summa av $e^{jk\omega_0 t}$
- Kontinuerliga signaler

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

  Viktad summa av $e^{j\omega t}$

Signalernas amplitud fördelade över de ingående frekvenserna

$$|c_k|, \omega = k\omega_0$$
$$|X(j\omega)|, \forall\omega$$

Signalen fas fördelade över de ingående frekvenserna,

$$\arg\{c_k\}, w = k\omega_0$$
$$\arg\{X(j\omega)\}, \forall\omega$$

Utifrån parsevals formel fås:

- Periodisk signal (Effekt Signal) Effekt(täthet) spektrum, totalmedeleffekt

$$P = C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|^2$$

- Kontinuerlig signal (Energisignal)

$$|X(j\omega)|^2 \forall\omega$$

  Energi(täthets)spektrum

Fourietransform av periodiska signaler

Börja så här: Vilken signal har Fourier-transformen $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$?

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)d\omega = 1$$

$x(t)$ är en konstant signal $x(t) = 1, \forall t$, $X(j\omega)$ ger endast bidrag vid $\omega = 0$ Uttnyttja egenskap vid frekvensskift.

$$
\begin{aligned}
&x(t) \rightarrow_{FT} X(j\omega) \\
&x(t)e^{j\omega_0 t} \rightarrow_{FT} X(j(\omega - \omega_0)) \\
&1 \cdot e^{j\omega_0 t} \rightarrow_{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\
&\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \rightarrow_{FT} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\
&\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \rightarrow_{FT} = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]
\end{aligned}
$$

Antag: $x(t)$ är kontinuerlig och periodisk signal som vi kan teckna som en fourieserie. Genom superposition fås

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow_{FT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Två möjliga beskrivningar:

$c_k \leftarrow_{FS}$	x(t)	$X(j\omega)$
Diskret, icke periodisk, viktfaktor för varje ingående frekvens $k\omega_0$	kontinuerlig, periodisk med $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$	kontinuerl

Kontinuerligt LTI-system

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Fouriertransformera!

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

Om insignalen är periodisk, teckna dess fourieserie och därefter notsvarande fourietransfrom.

$$x(t) = \sum k = -\infty^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - \omega_0)$$

Utsignal

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - \omega_0 k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot H(j\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot H(j\omega_0 k) \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

Notera att $c_k H(j\omega_0 k)$ är fourieserie koeff, för y och vi kan teckna

$$y(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot H(jk\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Varje frekvenskomponent i insignalen med frekvens $k\omega_0$ påverkas av systemet med $H(j\omega_0 k)$, vilket kallas systemets frekvenssvar.

Notera $H(j\omega) = Ft\{h(t)\}, H(j\omega) \in \mathbb{C}$

Amplitudpåverkan: $|H(j\omega)|$

Faspåverkan: $\arg\{H(j\omega)\}$

RC krets demo

Bild av RC krets med resistor R och Kap Q

$$Q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau + Q_0$$

$$Q_0 = 0$$

$$Q = c \cdot u_0$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = i(t) = C\frac{du_0(t)}{dt}$$

$$\text{KVL: } -u_i(t) + i(t)R + u_0(t) = 0 \rightarrow RC \cdot \frac{du_0(t)}{dt} + u_0(t) = u_i(t)$$

Fouriertransformera och bilda kvot

$$RC \cdot j\omega U_0(j\omega) + U_0(j\omega) = U_i(j\omega)$$

$$\frac{U_0(j\omega)}{U_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \{RC = \frac{1}{\omega_0}\} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = H(j\omega)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$arg\{H(j\omega)\} = -\arctan(\frac{\omega}{\omega_0})$$

Lecture notes
Lukas Rahmn
20 September 2017

Repetition av viktiga samband

- $x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) * \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = x(t - t_0)$
- Fouriertransformens egenskaper
  - Frekvensskifte:

$$
\begin{aligned}
&g(t) \rightarrow_{FT} G(j\omega) \\
&e^{jk\omega_0 t} \rightarrow_{FT} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) \\
&e^{jk\omega_0 t} \cdot g(t) = G(j(\omega - k\omega_0))
\end{aligned}
$$

  - Multiplikation och Faltning

$$
\begin{aligned}
&g(t) * f(t) \rightarrow_{FT} G(j\omega) \cdot F(j\omega) \\
&g(t) \cdot f(t) \rightarrow_{FT} \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * F(j\omega)
\end{aligned}
$$

Låt $f(t) = e^{jk\omega_0 t}$

$$g(f) \cdot e^{jk\omega_0 t} \rightarrow_{FT} \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) = G(j(\omega - k\omega_0))$$

Låt $g(t) \rightarrow_{FT} G(j\omega)$, icke periodisk signal och $x(t) \rightarrow_{FT} X(j\omega)$ en periodisk signal. Då har den en fourieserie

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

och Fourietransform

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

Bilda ny signal, $y(t) = g(t) \cdot x(t)$

$$
\begin{aligned}
&y(t) \rightarrow_{FT} \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * X(j\omega) = Y(j\omega) \\
&Y(j\omega) = \frac{2\pi}{2\pi} G(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)) = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k G(j(w - k\omega_0))
\end{aligned}
$$

Sampling

En diskret signal skapas utifrån en kontinuerlig signal $x(t)$.

$$g[n] = x(nT)$$

$g[n]$: en diskret representation av x(t). Värden hos x(t) avläses vid diskreta tid-punkter, nT. Kan x(t) återskapas från $g[n]$? Modell för sampling (innehåller kontinuerliga signaler):

$$x(t) \cdot p(t) = x_p(t)$$
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$p(t)$ är ett impuls tåg. x(t) är kontinuerlig.

$$x(t) \cdot \delta(t - nT) = x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

Multiplikation i tidsdomän ($x(t) \cdot p(t)$) ger faltning i frekvensdomänen.

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

Beräkna $P(j\omega)$, vilken är periodisk med perioden T, så finn dess fourieserie.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \forall k$$

Teckna Fourietransformen p(t).

$$P(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_s)$$
$$= w$$

också ett impulståg men längs ω-axeln. Notera $c_k = \frac{1}{T}$, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

$$X_p(j\omega) = X(j\omega) * P(j\omega)$$
$$= \frac{2\pi}{2\pi T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Observera! x(t) kan återskpas $x_p(t)$ genoom lågpassfiltrering och multiplikation med T <u>om</u> $\omega_m < \frac{\omega_s}{2}$.

ω_s: samplingsvinkel frekvens.

ω_m: den samplade signalens högsta vinkel frekvens

Vektorer

Magnitud: $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

Resultant: $R_x=A_x+B_x$, $R_y=A_y+B_y$

Skalärprodukt 1: $\tilde{\mathbf{A}}\cdot\tilde{\mathbf{B}}=AB\cos\phi$

Skalärprodukt 2: $\tilde{\mathbf{A}}\cdot\tilde{\mathbf{B}}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

Kryssprodukt 1: $\tilde{\mathbf{A}}\times\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{C}=AB\sin\phi$

Kryssprodukt 2: $C_x=A_yB_z-A_zB_y$, $C_y=A_zB_x-A_xB_z$, $C_z=A_xB_y-A_yB_x$

Kinematik

Momentanhastighet: $v=dx/dt$

Momentanacceleration: $a=dv/dt=d^2x/dt^2$

$$\vec{v}_{av}=\Delta r/\Delta t$$

Om a konstant:

$$V_f=V_0+at$$

$$x_f-x_i=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$v_f^2-v_i^2=2a(x_f-x_i)$$

Cirkulär centralrörelse

Konstant fart: $a_r=v^2/r$

Fart ändras: $a_r=v^2/r$ och $a_t=\frac{dv}{dt}$

Newtons lagar

1: Kordinatsystem som rör sig med konstant hastighet relativt varandra är ekvivalenta

2: $F=\frac{dp}{dt}$ och $p=mv$ ger:

$$F=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}$$

Dock oftast: $F_{net}=ma$

3: Krafter uppträder i par

Tillämpa Newtons lagar

1: Koordinatsystem

2: Frilägg

3: Krafter

Kaströrelse

$$x=(v_0\cos\alpha_0)t$$

$$y=(v_0\sin\alpha_0)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x=v_0cos\alpha_0$$

$$v_y=v_0\sin\alpha_0-gt$$

Svängningar

$x(t)=A\sin(\omega t+\phi)$, där $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Starta klockan i noll, påväg uppåt: $A\sin\omega t\Rightarrow v(t)=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos t\Rightarrow\omega A$

Starta klockan i noll, påväg nedåt: $-A\sin\omega t\Rightarrow v(t)=-\omega A\cos t\Rightarrow-\omega A$

Starta klockan i max: $A\cos\omega t$

Starta klockan i min: $-A\cos\omega t$

Arbete

Enhet: $J=Nm$

För fjäder: $\vec{F}=-k\vec{r}$

$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$W_{i\to f}=\int_i^f\vec{F}\cdot d\vec{r}$

Arbete uträttat av fjäder: $W_{i\to f}=-k\int_{xi}^{xf}xdx=\frac{1}{2}kx_i^2-\frac{1}{2}kx_f^2$

Energi

Rörelseenergi: $K=\frac{1}{2}mv^2$

Potentiell energi (för fjäder): $U=\frac{1}{2}kx^2$

Om ingen friktion finns bevaras den mekanisk energin $U+K$: $U_i+K_i=U_f+K_f$

Rörelsemängd

$\vec{p}=m\vec{v}$

$\vec{P}=\sum_i\vec{p}_i$

Den totala rörelesemängden för ett isolerat system bevaras.

Friktion

$\vec{f}=\mu\vec{N}$

Tyngdpunkt

$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i=\sum_i\frac{d}{dt}(m_i\vec{r}_i)$

Tyngdpunktens läge: $\vec{R}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$, där $M=\sum_i m_i$

$\Rightarrow\vec{P}=\frac{d(M\vec{R})}{dt}$

$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d^2(M\vec{R})}{dt^2}=M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=M\vec{a}_{CM}$

$\sum_i\vec{F}_i^{ext}=M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=M\vec{a}_{CM}$

Summan av alla externa krafter ger oss tyngdpunktens acceleration

För kontinuerligt (kroppar): Integral

Allmänna gaslagen

$PV=nRT$, $R=8.31$

$n=$ antalet mol $=\frac{N}{N_A}$

$N_A=6.022140857*10^{23}\text{mol}^{-1}$ Avokados tal

Energi för enatomig gas

$E_{medel}=\frac{3}{2}k_bT$

$k_b=\frac{R}{N_A}1.38*10^{-23}J/K$

$E_{int}=n\frac{3}{2}RT$

I denna kurs ersätts 3 med 5 för tvåatomiga gaser

Utvidgning

$l=l_0(1+\alpha\cdot\Delta T)$

α: längdutvidgningskoefficient

För ytutvidgning: $2\cdot\alpha$

För volymutvidgning: $3\cdot\alpha$

Värmekapacivitet

$Q=mc\Delta t$

c: Materialkonstant med enhet $J/kg\cdot grad$

H2O: $4.18\cdot10^3J/kg\cdot grad$

Latent värme

$Q=mL$

Is till vatten: $333\cdot10^3J/kg$

Vatten till ånga: $2.26\cdot10^6J/kg$

Termodynamikens första huvudsats

$dQ=dE_{int}+dW_g$

$Q_{i\to f}=\Delta E_{int}+W_{i\to f}$

Enatomig gas, konst. V: $C_V=n\frac{3}{2}R\ dT$

Enatomig gas, konst. P: $C_P=n\frac{5}{2}R\ dT$

Tvåatomig gas, konst. V: $C_V=n\frac{5}{2}R\ dT$

Tvåatomig gas, konst. P: $C_P=n\frac{7}{2}R\ dT$

Arbete värme

$dW_g=F_gdx=P\cdot dV$

Isokor: $W_g=0$, pga volym konstant

Isobar: $W_g=P(V_f-V_i)$, pga tryck konstant

Isoterm: $W_g=nRT*ln\frac{V_f}{V_i}$, pga $PV=konst.$

Adiabat ($Q=0$): $PV^\gamma=konstant$, $\gamma=\frac{C_p}{C_v}$

$W_{gas}=\frac{1}{\gamma-1}(P_1V_1-P_2V_2)$

$P_1V_1^\gamma=P_2V_2^\gamma$

Verkningsgrad och COP

$e=\frac{W_g}{Q_{tillf}}=\frac{\sum Q}{\sum Q_{Pos}}$

$K=\frac{|Q_C|}{|W_g|}=\frac{|Q_C|}{|Q_H|-|Q_C|}$

$e_{Carnot}=1-\frac{T_C}{T_H}=\frac{T_H-T_C}{T_H}$

$K_{Carnot}=\frac{T_C}{T_H-T_C}$

Värmeledningsförmåga

$P=\frac{dQ}{dT}=A\ k\ \frac{T_n-T_l}{l}$

k=värmeledningsförmåga: enhet W/mK

A=Tvärsnittsarea

Harmoniska vågor

$v\cdot T=\lambda$, $f=1/T$, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, $v=\frac{\omega}{k}$

$y(x,t)=A\ sin(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt))$

$\Rightarrow y(x,t)=A\ sin(kx-wt)$

Allmänt: $y(x,t)=A\ sin(kx-wt+\phi)$

Partikelhastighet: $\frac{dy}{dt}=-\omega A\cos(kx-\omega t)$

Partikelacceleration: $\frac{d^2y}{dt^2}=\omega^2A\sin(kx-\omega t)$

Fashastighet: $v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$,där $\mu=$ massa/längd

Reflektion

$y_i=A_i\sin\omega(t-\frac{x}{v_1})$

$y_r=A_r\sin\omega(t+\frac{x}{v_2})$

$y_t=A_t\sin\omega(t-\frac{x}{v_2})$

$y_i+y_r=y_t$, $A_i+A_r=A_t$

$\frac{1}{v_1}(A_i-A_r)=\frac{1}{v_2}A_t$

$A_t=\frac{2v_2}{v_2+v_1}A_i$, $A_r=\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}A_i$

EM-vågor, $A_r=\frac{n_a-n_b}{n_b+n_b}A_i$

Intensitet

Effekt/m^2

$I\sim(amplitud)^2$

$I_{max}\sim4A^2$

$I=I_{max}\cdot\cos^2(\frac{\phi}{2})$

Interferens

$y_{tot}=y_1+y_2=2A\cos\frac{\phi}{2}\sin(kx-\omega t+\frac{\phi}{2})$

m: heltal

Konstruktiv interferens:

$\cos\frac{\phi}{2}=\pm1\Rightarrow\phi=m\cdot2\pi\Rightarrow(2A\cdot\cos\frac{\phi}{2})^2=4A^2$

Destruktiv interferens:

$\cos\frac{\phi}{2}=0\Rightarrow\frac{\phi}{2}=(2m+1)\cdot\frac{\pi}{2}\Rightarrow(2A\cdot\cos\frac{\phi}{2})^2=0$

Stående vågor

$y_{tot}=y_1+y_2=2A\sin kx\cos\omega t$

På sträng: $\lambda=\frac{2L}{n}$, $f=\frac{m\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2L}$

n = 1 är grundtonen

Svävningar

$y_1=Acos(k_1x-\omega_1t)$, $y_2=Acos(k_2x-\omega_2t)$

$\omega=2\pi f$

$y=y_1+y_2$

$=2A\cos(2\pi(\frac{f_1-f_2}{2})t)\cos(2\pi(\frac{f_1+f_2}{2})t)$

$f_{beat}=f_1-f_2$

EM-vågor

Brytningsindex: $n=\sqrt{\epsilon_r}$, $v_{fas}=\frac{c}{n}$

$f=\frac{v}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{\lambda_0}{n}$

$\phi_2-\phi_1=2\pi\frac{nL}{\lambda_0}$, nL: optisk väg

Brytningslagen:

$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$, θ: infallsvinkel

Totalreflexion:

$n_1\sin\theta_{kritisk}=n_2\sin90°\Rightarrow\sin\theta_{kritisk}=\frac{n_2}{n_1}$

Interferens för ljus

Dubbelspalt:

Max: $d\sin\theta=m\lambda$

Min: $d\sin\theta=(m+\frac{1}{2})\lambda$

θ=vinkel emot gitterplanets normal

d=spaltavstång, gitterkonstant

Fas vs vägskilnad

$$\frac{\Phi}{2\pi}=\frac{r_2-r_1}{\lambda}$$

Reflektion i tunna filmer

För inget relativt fasskifte:

$2tn=m\lambda_0$ (Konstruktivt)

$2tn=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_0$ (Destruktivt)

Byt plats på formlerna vid relativt fasskifte

Minsta tjocklek som ger min: $d=\frac{\lambda}{4n}$

Diffraktion- en slits

Min: $a*\sin\theta_{min}=m\lambda, m=\pm1,\pm2,...$

$I=I_0\left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$, β: största faskilnaden

$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}a*\sin\theta$

Diffraktion- två slits

$$I=I_0\cos^2\frac{\Phi}{2}\left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$$

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}a*\sin\theta,\ \Phi=\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

Vinklar

$$\theta=\frac{s}{r},\ s\text{=cirkelbågens längd}$$

Cirkelrörelse-stela kroppar

$$a_{tan}=\frac{dv}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}=r\alpha$$

$$a_{rad}=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r$$

Rotationsenergi

$dK_r=\frac{1}{2}dm\cdot v^2$
$v=\omega r$
$\Rightarrow dK_r=\frac{1}{2}dm\omega^2 r^2$
$K_r=\int dK_r=\frac{1}{2}I\omega^2$

Tröghetsmoment

$I=\int_{hela} r^2 dm=\rho\int_{hela} r^2 dV$
Tunn pinne, axel mitten: $I=\frac{1}{12}ML^2$
Tunn pinne, axel ände: $I=\frac{1}{3}ML^2$
Cylinder: $I=\frac{1}{2}MR^2$
Ring: $I=MR^2$
Klot($Solid$): $I=\frac{2}{5}MR^2$
Klot($Skal$): $I=\frac{2}{3}MR^2$
Parallel förskjutning: $I=I_{CM}+Md^2$

Vridande moment

$\bar{\tau}\equiv\bar{r}\times F$

Rörelsemängdsmoment

$L\equiv\bar{r}\times\bar{p},\ \bar{p}=m\bar{v}$
Summan av alla yttre vridande moment: $\bar{\tau}=\frac{d\bar{L}}{dt}$
$|\bar{L}|=I\omega$
$\tau=I\alpha$

Motsvarigheter i partikelfysik

$m\rightarrow I,\ x\rightarrow\theta,\ v\rightarrow\omega,\ a\rightarrow\alpha,\ F\rightarrow\tau,\ p\rightarrow L$

Problemlösning, stela kropar

$$\sum\bar{F}_{ext}=M\bar{a}_{CM} \quad (1)$$

$$\sum\tau=I_{CM}\alpha \quad (2)$$

För att 2 ska gälla får axeln inte ändra riktning och axeln genom tyngdpunkten måste vara symmetri axeln.

Bevarade storheter

Mekanisk energi: Inga irreversibla krafter i systemet (friktion, deformering)
Rörelsemängd: Inga externa krafter
Rörelsemängdsmoment: Inga externa vridande moment
$v=\omega r,\ a=\alpha r$

	Isokor	Isobar	Isoterm	Adiabat
Q	$nC_v(T_2-T_1)$	$nC_p(T_2-T_1)$	$nRT\cdot ln\frac{v_2}{v_1}$	0
ΔE_{int}	$nC_v(T_2-T_1)$	$nC_v(T_2-T_1)$	0	$nC_v(T_2-T_1)$
W_{gas}	0	$P(V_2-V_1)$	$nRT\cdot ln\frac{v_2}{v_1}$	$nC_v(T_1-T_2)$

Lecture notes TIF085

Lukas Rahmn

2 november 2016

Inte första föreläsningen, utan endast snabb genomgång av föregående teori

Vektror

Storlek och riktning Fysikaliska storheter

1. hastighet
2. kraft
3. acceleration

1. Sträcka
2. Fart
3. Tryck
4. Volym

Lecture notes TIF085

Lukas Rahmn

7 november 2016

Kinnematik (rörelselära)

En dimension

<u>1 dim</u> vektor egenskaper: + eller -.

läge	hastighet(velocity)	fart(speed)
x	$\bar{v}$	$\lvert\bar{v}\rvert$

$v = \dfrac{dx}{dt}$ momentan hastigheten

$dx = v * dt$

acceleration $a = \dfrac{dv}{dt} => dv = a * dt$

$x_f - x_i = v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2$

$v_f^2 - v_i^2 = 2as \leftarrow$ accelerations sträckan

Härledning:

$dx = v * dt \rightarrow dt = \dfrac{dx}{v}, dv = adt$

$dv = a\dfrac{dx}{v} v * dv = a * dx$

$$=> \int_i^f v dv = \int_i^f a dx \rightarrow \text{(Konstant a)} \rightarrow \frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2) = a(x_f - x_i) \rightarrow v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i)$$

Figur 1: Exempel av sträcka

Resa från gbg till sthlm, vad är medelhastigheten, givet att hastighet vid resa gpg till sthlm är v_1, tillbaka är v_2 och avståndet emellan städerna s?

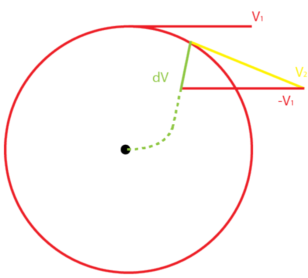
$$V_{medel} \neq \frac{V_1 + V_2}{2}$$

$$\text{Medelfart:} \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{\frac{sv_2 + sv_1}{v_1 v_2}} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Två dimmensioner

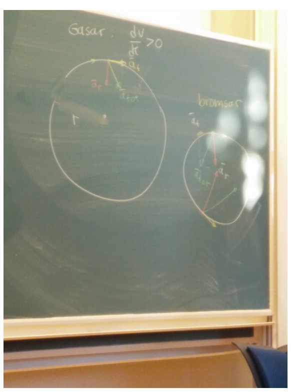
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$
$$\bar{r}_f - \bar{r}_i = \bar{v}_0 t + \frac{1}{2}\bar{a}t^2$$

Uniform centralrörelse



Figur 2: Härledning av accelerations riktning vid centralrörelse

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_t, a_t = \frac{dv}{dt}, |\bar{a}_r| = \frac{v^2}{r}$$



Figur 3: Exempel på uniform centralrörelse

Newtons lagar och krafter

Fältkrafter	Kontaktkraft
Tyngdkraft	Normalkraft
Magnetisk kraft	Friktionskraft
Coulombkraft	Spännkraft

Egentligen är båda fältkrafter, normal krafter är t.ex att rep mellan atomerna, alltså en fältkraft.

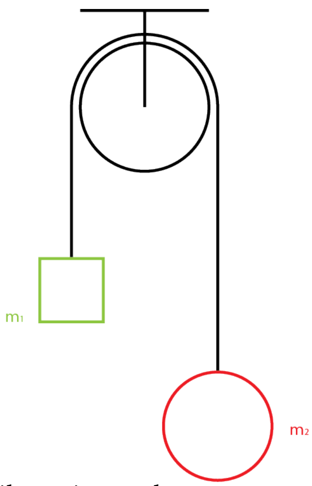
Newtons lagar

1. Kordinatsystem som rör sig med konstant hastighet relativt varandra är ekvivalenta.
2. $\bar{F} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt} \quad \left(m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a}\right)$

3. Krafter uppträder alltid i par.

Problemlösning

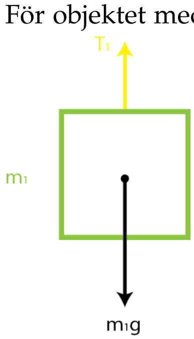
1. Rita koordinatsystem
2. Frilägg alla kroppar, rita en figur per kropp
3. Identifiera krafterna på var och en av kropparna
4. ställ upp Newtons andra lag för var och en av kropparna



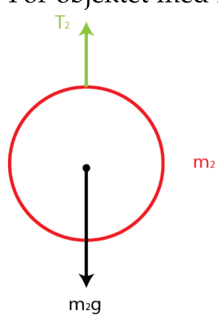
snöret är: masslöst och otänjbart
trissan är: oändligt glatt
Bestäm acceleration och spänn-kraft

Friläggning av kropparna:

För objektet med massa m_1



För objektet med massa m_2



$$m_1\bar{g} + \bar{T}_1 = m_1\bar{a}_1$$

$$m_1 g(-\hat{j}) + T_1\hat{j} = m_1 a_1\hat{j}$$

$$\rightarrow T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

Ytterligare information $-a_1 = a_2,\ T_1 = T_2$

$$
\begin{aligned}
T - m_1 g = m_1 a &\mid T - m_1 g = m_1 a \\
T - m_2 g = m_2 a &\mid -T + m_2 g = m_2 a \\
a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g &| (m_2 - m_1) g = (m_1 + m_2) a \\
&| m_2 T - m_2 m_1 g = m_1 a m_2 \\
&| m_1 T - m_1 m_2 g = -m_2 a m_1 \\
\hline
&| (m_1 + m_2) T - 2 m_1 m_2 g = 0 \\
&T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g
\end{aligned}
$$

Lecture notes

Lukas Rahmn

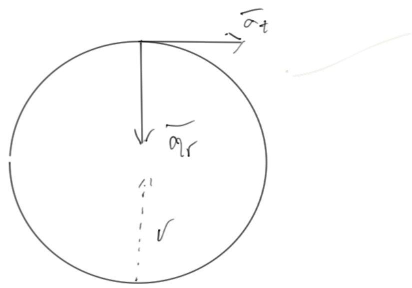
9 November 2016

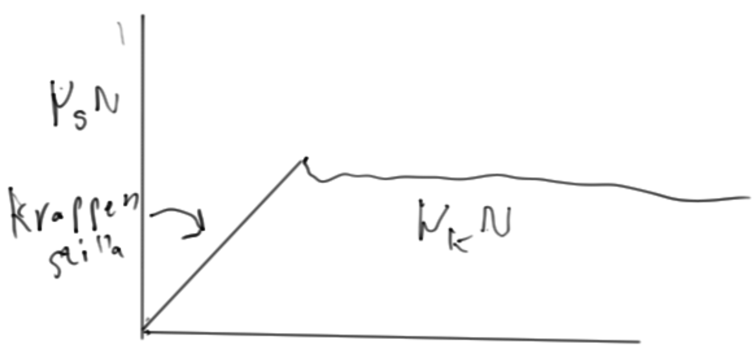
Idag: repition, friktion, newtons lagar, svängningar

Kinematik

$\bar{r}$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d\bar{v}}{dt} \bar{r_f} - \bar{r}_i = \bar{v_0}t + 1/2\bar{a}t^2$$

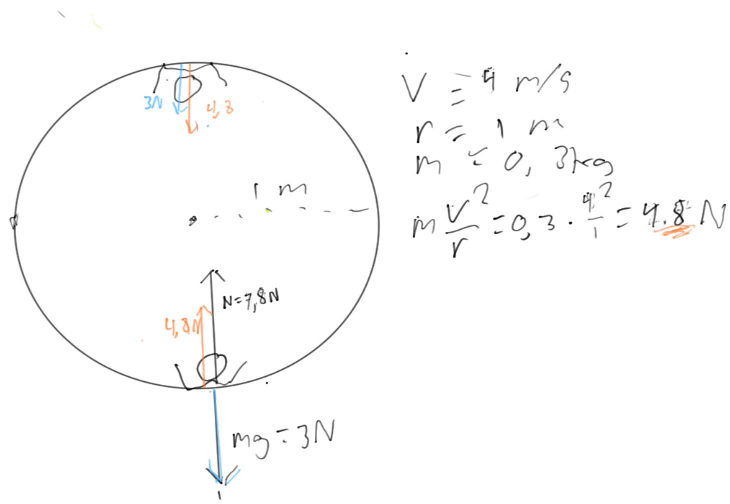


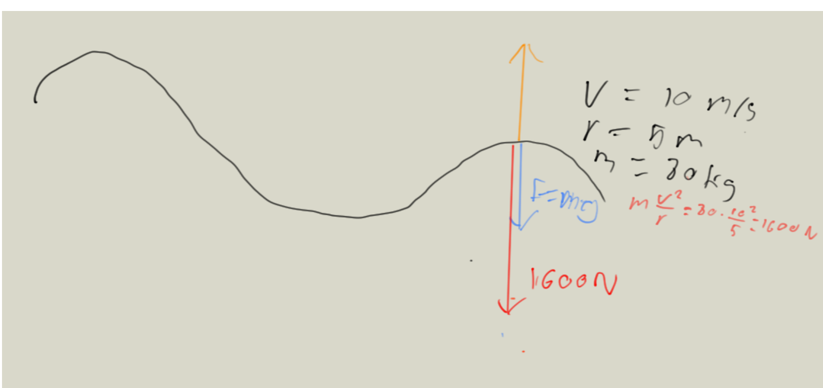


Figur 1: Centralrörelse

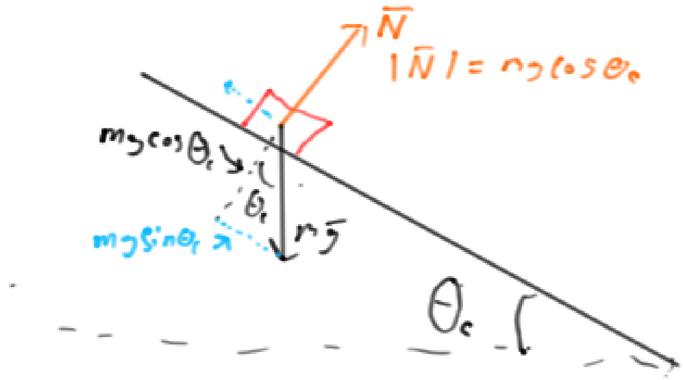
$$v = 4/s, r = 1m, m\frac{v^2}{r} = 0,3\frac{4^2}{1} = 4.8N$$

$$m = 0.3kg$$

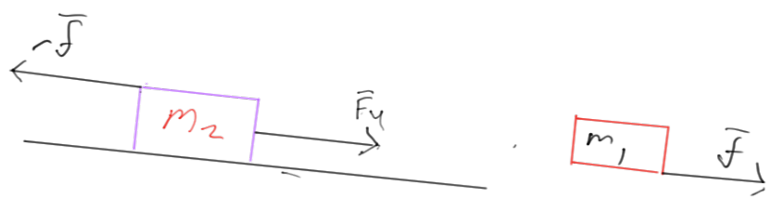




Friktion



Bestämma μ_s för en krit-ask.
Vid kritiska läget : $f = mg\sin(\theta_c)$. max $f = \mu_s mg\cos(\theta_c)$.

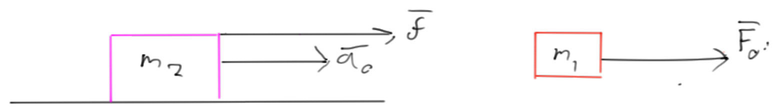


$\mu_s mg\cos(\theta_c) = mg\sin(\theta_c)$
För m_1 boxen:

$$\begin{aligned} f &= \mu_s m_1 g \\ \mu_1 m_1 g &= m_1 a_u \\ \underline{a_u} &\underline{= \mu_s g} \end{aligned}$$

För m_2 boxen

$$\begin{aligned} F_u - f &= m_2 a_u \\ F_u - \mu_s m_1 g &= m_2 \mu_s g \\ \rightarrow \underline{F_u} &\underline{= (m_1 + m_2)\mu_s g} \end{aligned}$$



Byt plats på kroken till den övre boxen

$$f = m_2 a_0 = \mu_s m_1 g, F_0 - \mu_s m_1 g = m_1 a_0$$
$$a_0 = \mu_s \frac{m_1}{m_2} g \to F_0 - \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2)\mu_s g$$
$$\to F_0 = \frac{m_1}{m_2} F_u = \frac{4}{5} 27 = 22N$$

Svängningar

Hook fjäder $\bar{F}_s = -k\bar{x}$ k = fjäderkonstanten N/M.

$$\bar{F}_s = -k\bar{x} = m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$
$$\to \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

allmäns lösning:

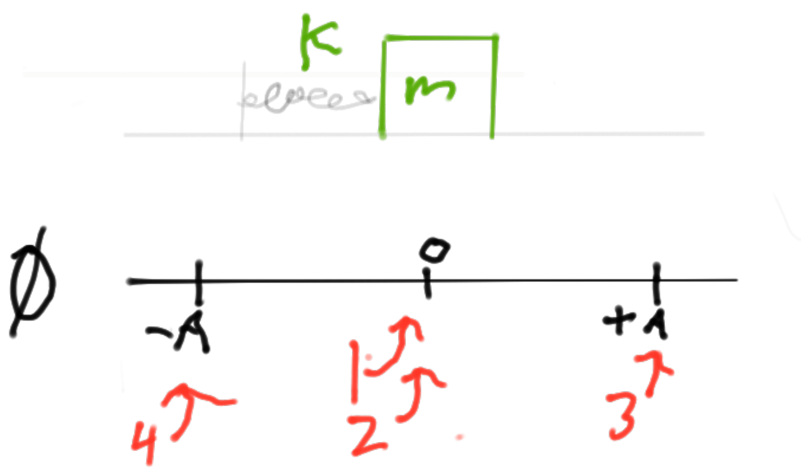
$$x(t) = A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi)$$

Inför winkel hastighet ω : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

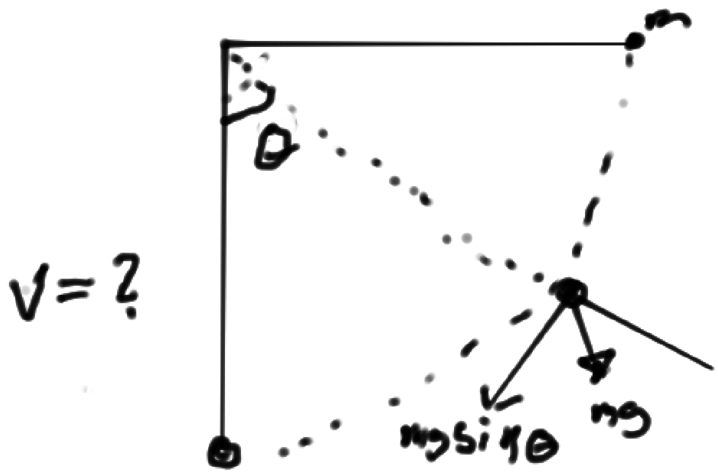
Lecture notes
Lukas Rahmn
10 November 2016

Svängningar

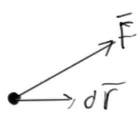


$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1}$$
$$x(t) = -A\sin(\omega t) \tag{2}$$
$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{3}$$
$$x(t) = -A\cos(\omega t) \tag{4}$$

Arbete - Energi



Arbete



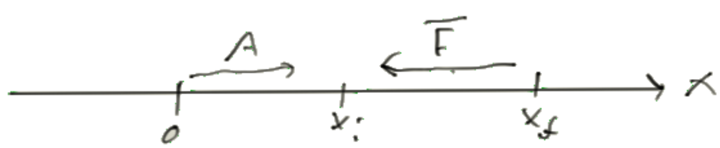
Enhet : $J = Nm$

$$W_{i \to f} = \int_i^f \bar{F} d\bar{r}$$

$$dW = (F \cos\theta) dr = F(dr \cdot cos\theta)$$

Figur 1: Arbetet som uträttas av en fjäder

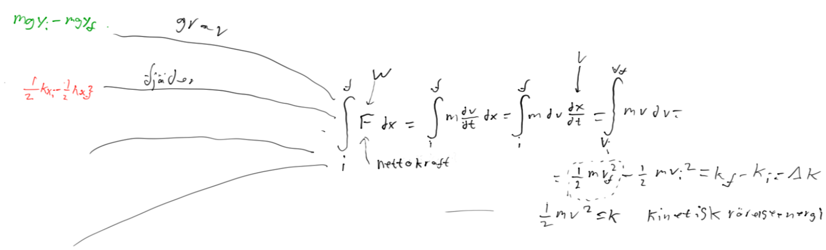
$$\bar{F} = -k\bar{x} = -kx\hat{i}$$



$$W_{i \to r} = \int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{x} = \int_i^f (-kx\hat{i}) \cdot (dx\hat{i})$$

$$= -k \int_i^f xdx(\hat{i} \cdot \hat{i})$$

$$\to W_{i \to f} = -k \int_{x_i}^{x_f} xdx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$



Fjäder:

$$\frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\text{Läges eller potentiell energi} => \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}kx_i^2$$

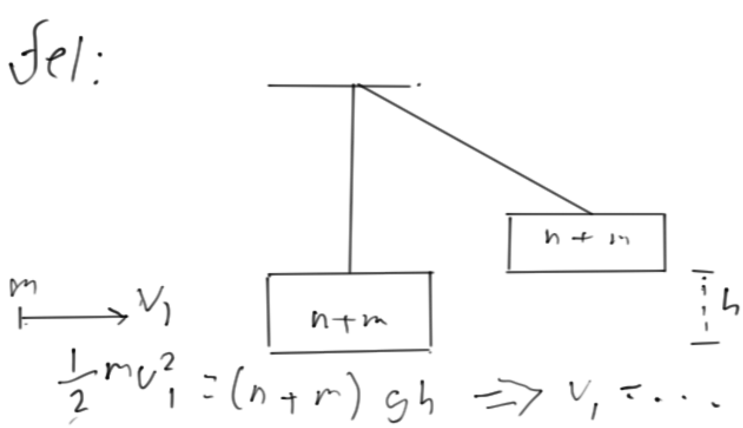
$$U = \frac{1}{2}kx^2, -\Delta U = \Delta K$$

Gavitation:

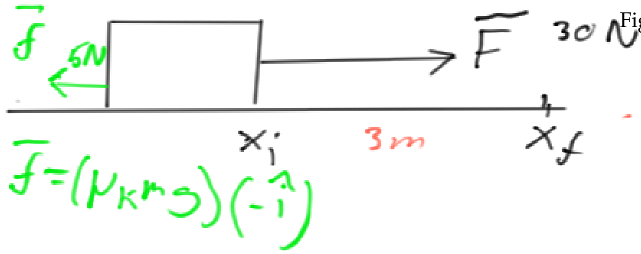
$$W_{i\to f} = \int_i^f mg(-\hat{j})dy(\hat{j}) =$$

$$= -mg\int_i^f dy = -mg(y_f - y_i) = mgy_i - mgy_f =$$

$$mgy_i - mgy_f = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$



Figur 2: Exempel på felaktig energi beräkning. Energi går åt för uppvärming och deformering av trä blocket.

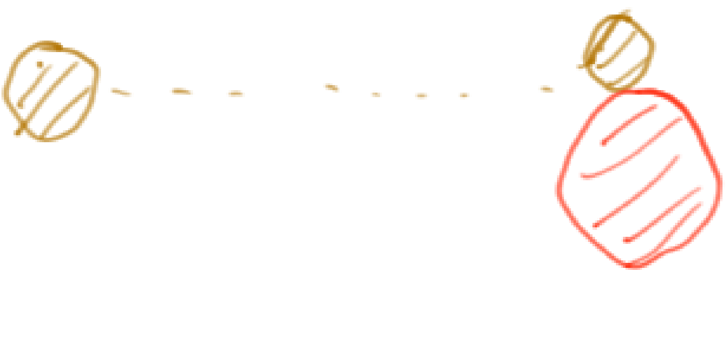


Figur 3: Friktion

Nettorkraft: $\bar{F} + \bar{f}$

$$|\bar{F} + \bar{f}| = |\bar{F}| - |\bar{f}| = 30 - 5 = 25N$$
$$W_{x_i \to x_f} = (\bar{F} + \bar{f}) \cdot \bar{x} =$$
$$= 25 * 3 = 75Nm$$

Rörelsemängd



$\bar{p} = m\bar{v}$

Netwons 2:a lag: $\bar{F} = \dfrac{d\bar{p}}{dt}$

Två partiklar(Isolerat system)

$$\bar{F}_1 = \frac{d\bar{p}_1}{dt}, \bar{F}_! = \bar{F}_2$$
$$\bar{F}_2 = \frac{d\bar{p}_2}{dt} \to \frac{d\bar{p}_1}{dt} = -\frac{d\bar{p}_2}{dt}$$
$$\to \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_2}{dt} = 0, \text{ Den totala rörelsemängden bevaras}$$

Lecture notes

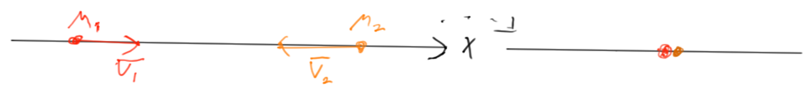
Lukas Rahmn

10 November 2016

Fortsättning på föregående föreläsning.

Kollisioner

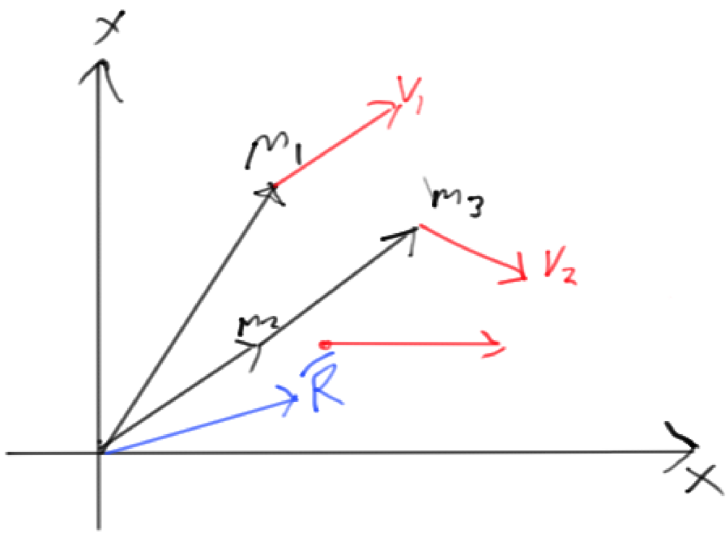
Inelastiska kollisioner



Endast totala frörelse mängden bevaras.

$$
\begin{aligned}
\bar{P}_i &= m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 \\
\bar{P}_f &= (m_1 + m_2)\bar{v} \\
\bar{P}_i = \bar{P}_f \rightarrow \bar{v} &= \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1 + m_2}
\end{aligned}
$$

Tyngdpunkt

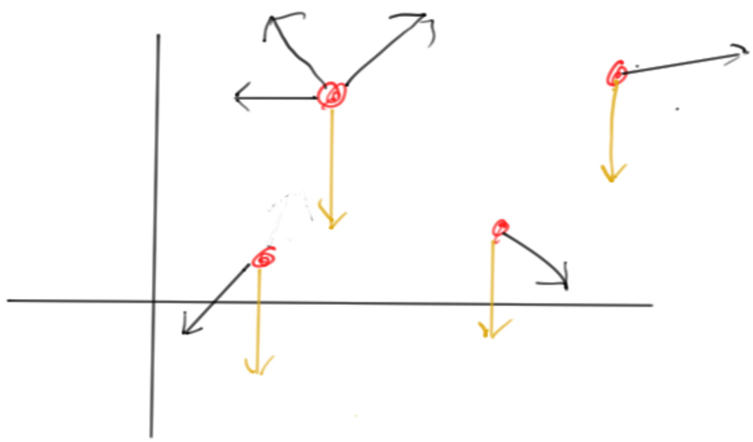


$$\bar{P} = \sum_i m_i \bar{v}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \bar{r}_i)$$

Definera tyngdpunktens läge $\bar{R}$ enligt

$$\bar{R} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{M}$$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d^2(M\bar{R})}{dt^2} = M\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} = M\bar{a_{cm}}$$



$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots$$

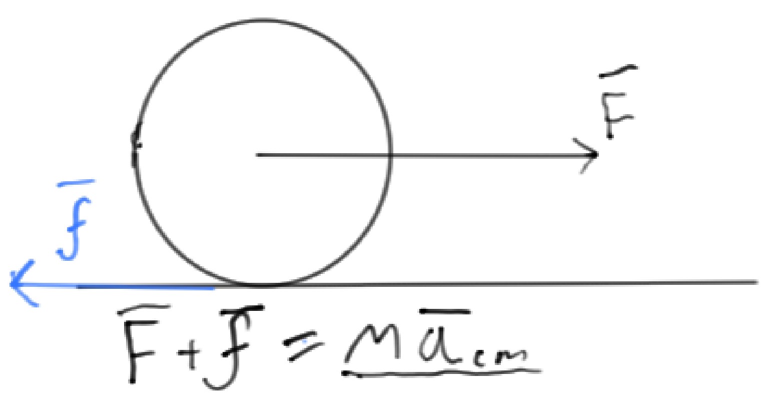
$$\frac{d\bar{P}}{dt} = +\frac{d\bar{P}_1}{dt} + \frac{d\bar{P}_2}{dt} + \dots =$$

$$= (\text{vita pilar} + 1) + \sum \text{gula pilar} = \sum \bar{F}_i$$

$$\sum \bar{F}_i \text{ext} = M\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} = M\bar{a_{CM}}$$

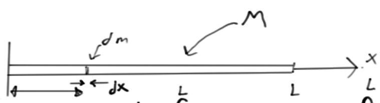
Summa av alla externa krafterna ger oss tyngdpunktes acceleration!

Exempel 1



Exempel, tyngdpunkt

Exempel 2



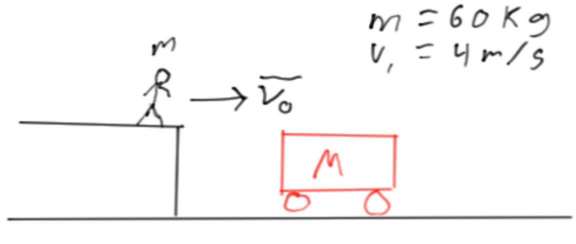
$$\left(\frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \frac{M}{L} dx \right)$$

$$X_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^L dm\, x = \frac{1}{\cancel{M}} \cdot \frac{\cancel{M}}{L} \int_0^L x\, dx =$$

$$\frac{1}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{L}{2}$$

Exempel 3

Tyndpunktens läge



$m = 60\,Kg \quad M = 120\,Kg$

$v_1 = 4\,m/s \quad \mu_k = 0,4$

1. Sluthastighet

$$mv_0 = (m+M)v \rightarrow v = \frac{m}{m+M} v_0 =$$
$$\frac{60 * 4}{120 + 60}$$

2. Friktionkraft

$$f = \mu_k N = \mu_k mg = 0,4 * 60 * 9.82 = 235N$$

3. Gliddid

$$a = \frac{f}{m} = \mu_k g$$
$$\Delta v = -at = (1.33 - 4.00) = 0.400 * 9.81 * t => t = 0.685$$

4. ΔP_m ΔP_M

$$\Delta P_m = P_f - P_i = 60(1.33 - 4.00) = -160 kgm/s$$
$$\Delta P_M = P_f - P_i = 190(1.33 - 0) = +160 kgm/s$$

5. Δx under glidning

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$$
$$1.33^2 - 4.00^2 = 2(-\mu_k g) * \Delta x => \Delta = 1.81m$$

6. Förflyttning av vagnen under gldningsfasen $\Delta x'$

$$f = \mu_k mg, a = \frac{\mu_k mg}{M}$$
$$1.33^2 - 0^2 = 2\frac{\mu_k mg}{M}\Delta x'$$
$$= 0.45m$$

7. ΔK_m (Föränding av rörelse energi)

$$\Delta K_m = \frac{1}{2}60(1.33^2 - 4.00^2) =$$
$$= -426.7J$$

8. Δ_M

$$\Delta K_M = \frac{1}{2}120 * 1.33^2 = 106.7J$$

Fattas $320J$!

9. Skillnad

$$235 * 1.36 = 320$$
$$1.36 = 1.81 - 0.45$$

Lecture notes

Lukas Rahmn

14 November 2016

Lite repition

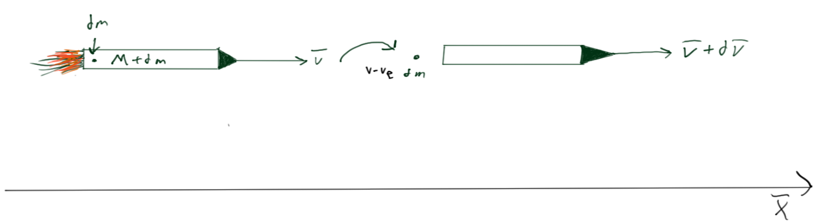
- raket ekv
- värmelära
- Mekanik problem

Problemlösnings metoder

1. Newtons 2:a lag, a
2. Mek energi, v
3. $\bar{P}$ bevaras

repition

Raketekvationen



$P_i = (M + dm)V$

$P_f = M(v + dv) + dm(v - v_e)$

$P_i = P_f$, Inga externa krafter

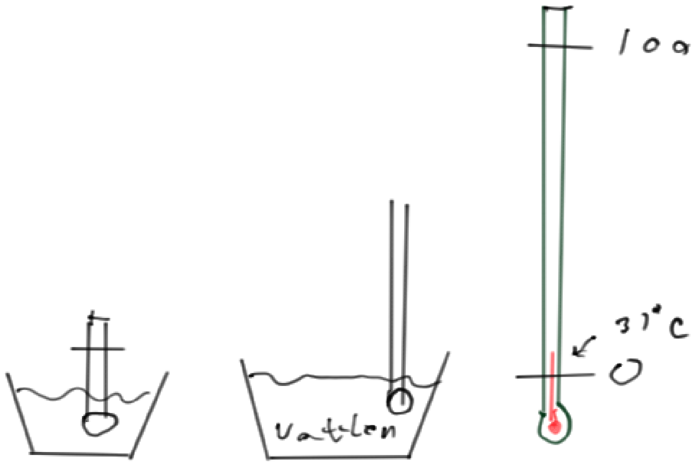
$(M + dm)v = M(v + dv) + dm(v - v_e)$

$\rightarrow Mdv = dmv_e, dm = -dM \rightarrow Mdv = -dMV_e$

$$\rightarrow \int_{v_i}^{v_f} dv = -V_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \rightarrow v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

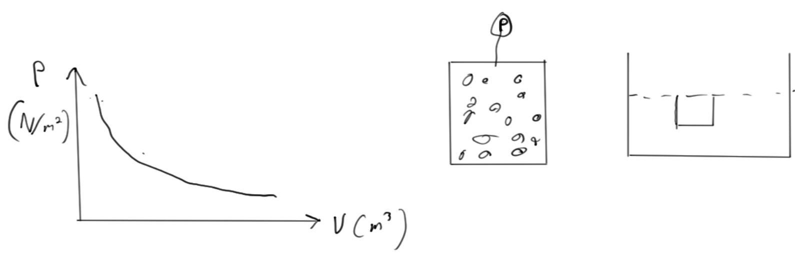
Värmelära

Temperatur



Dålig för höjd över havet, och utvigdningen av vätskan påverkar

Gastermometer



$PV = \underline{\text{konst}}T$

Vid 1 mol gas: konst $= 8,31$

$PV = nRT, R = 8.31J/K, n =$ Antal mol

Avrogadostal $N_A = 6,023 \cdot 10^23$st

Enheter för tryck

1. $1\ M/m^2 = 1Pa$
2. 1 bar $= 10^5 N/m^2$
3. $1\ atm = 1,013 \cdot 10^5 N/m^2$

Millimeter kvicksilver:

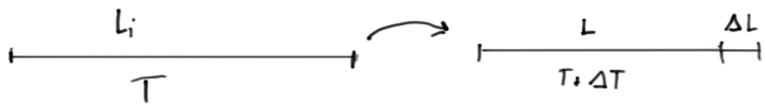
$P(Ah)\rho g/A$

$P = \rho gh$

$13,6 * 10^3 * 0,700 * 9.81 = 1.013 * 10^5$

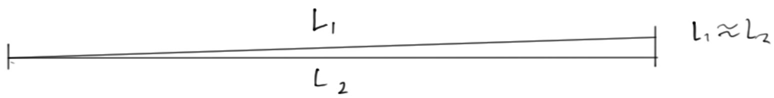
1dim:

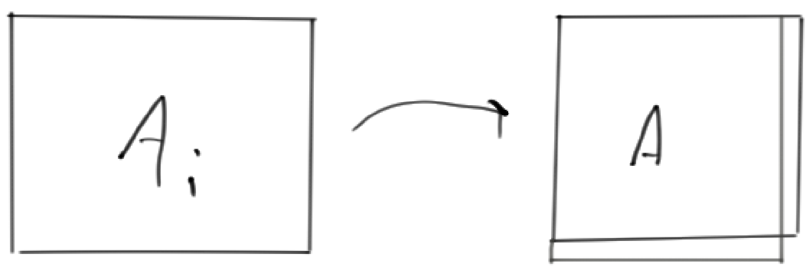
Termsik utvidning



α: linjära längdutvecklingskoeff, typiskt värde: $\alpha = 10^{-6}$

$$\Delta L = L_i \alpha \Delta T$$





2 dim:

$$A = A_i + \Delta A, \Delta A = A_i \beta \Delta T.$$

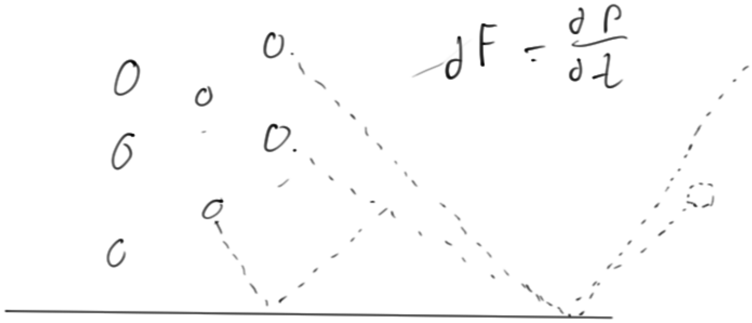
Tillbaka till ideala gaslagen

$PV = nRT$.

$$PV = \frac{N}{N_A} RTP = \left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{R}{N_A}\right) T \rightarrow P = \left(\frac{N}{V}\right) k_B T$$

Boltzmans konstant: $k_B = 1,23 * 10^-23 J/K$

Vad är egentligen temperatur?



Medelenergin ges av

$$E^{\text{medel}}_{\text{kinetisk energi}} = \frac{3}{2}k_B T$$

$\frac{1}{2}k_B T$ i medelenergi per frihetsgrad

Värme – inre energi - Arbete

Inre energi E^{int}

$$E^{int} = N\left(\frac{3}{2}k_B T\right) =$$
$$= N\frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{N}{N_A}\left(\frac{3}{2}R\right)T \rightarrow E^{int} =$$
$$= n\left(\frac{3}{2}R\right)T$$

Enatomiga molekyler (He,Ne,Ar,..) har 3 frihetgrader$\left(E_{medel} = \frac{3}{2}k_B T\right)$. Tvåatomiga molekyler $(H_2, 0_2, N_2, ...)$ har 5frihetsgrader, $E_int = \frac{5}{2}k_B T \rightarrow E_{int} = n\left(\frac{5}{2}R\right)T$

$dE^{int} = n\left(\frac{3}{2}R\right)dT$

Lecture notes

Lukas Rahmn

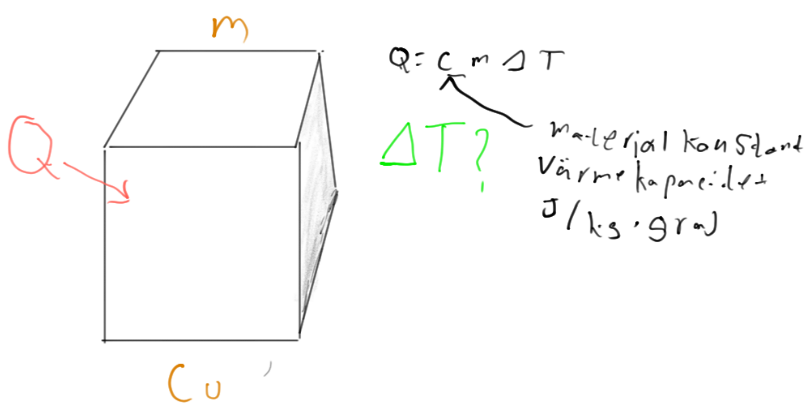
16 November 2016

REpition

Inre energi: E^{int}

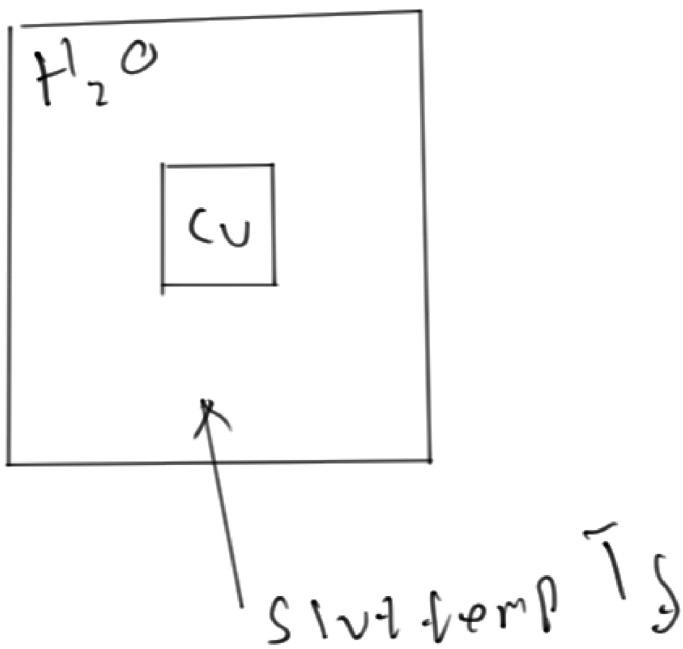
$$\begin{aligned} E^{int} &= N \cdot E_{medel}, \text{ n är antalet atomer} \\ \text{en at :} nN_A \cdot \frac{3}{2} k_B T &= n\frac{3}{2} R \cdot T \\ \text{tvåat :} m\frac{5}{2} RT \Delta E^{int} &= n\frac{3}{2} R(T_2 - T_1) \end{aligned}$$

Specifikt värme



$$H_2O : 4,18 \cdot 10^3 J/kg \cdot grad$$

Exempel

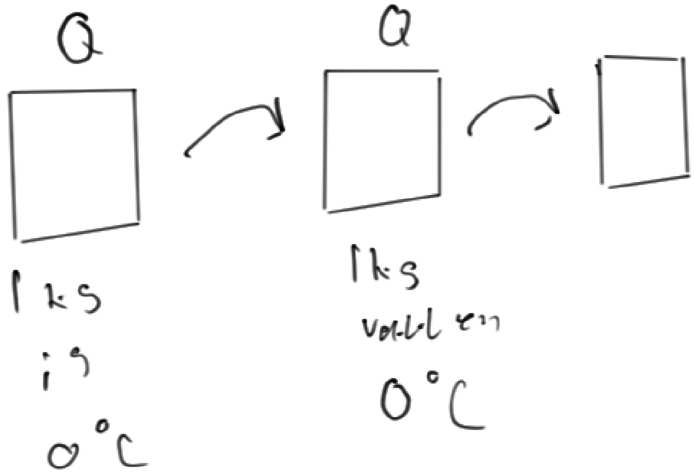


temp: $Cu = 60°C$ $\qquad$ $m_{cu} = 100g$

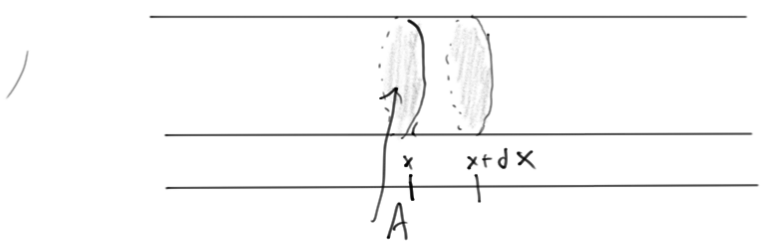
$H_20 = 10°C$ $\qquad$ $m_{h_20} = 2000g$

$$m_{cu}c_{cu}(T_{cu} - T_f) = m_{H_2O}C_{H_2O}(T_{cu} - T_{H_2O})$$

Latent värme



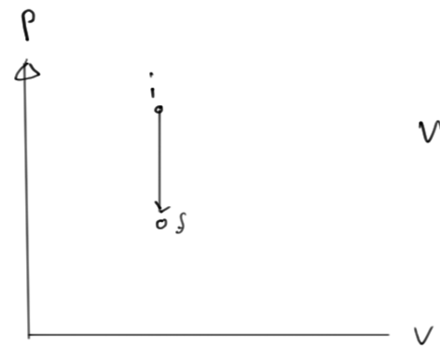
$Q = mL$ (fasövergångar) $L = 331 \cdot 10^3 J/kg$ (För vatten)



$$dW_{gas} = \bar{F} \cdot d\bar{x} = (PA)\hat{i}(dx\hat{i}) =$$
$$P(Adx) = PdV, dW_{gas} = PdV$$
$$W_{i \to f} = \int_i^f PdV$$

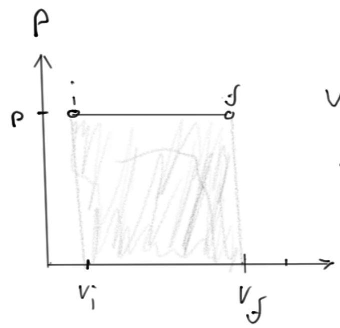
1. isokor
2. isobar
3. isoterm

isokor



$W_f = 0$

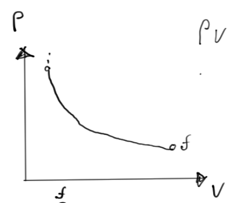
isobar



$$W_f = \int_i^f p\,dV$$

$$V = p\int_i^f dV = p(V_f - V_i)$$

Isoterm



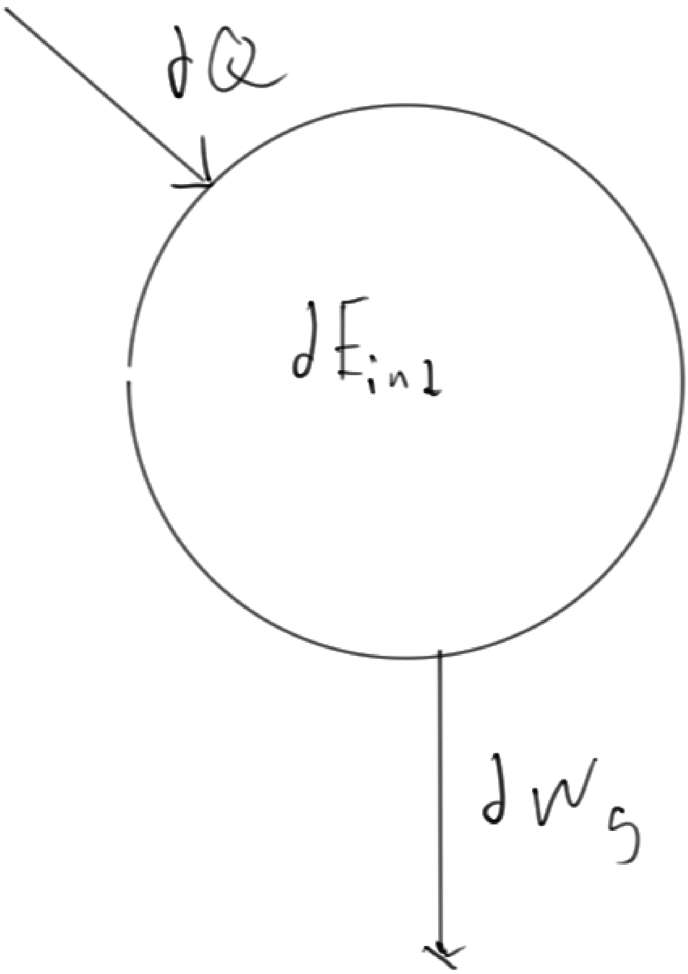
$pV = \text{konst}$

$$\boxed{\begin{aligned} &pV = nRT \Rightarrow \\ &p = nRT\frac{1}{V} \end{aligned}}$$

$$W_f = \int_i^f p\,dV = \int_i^f nRT\frac{dV}{V} = nRT\int_i^f \frac{dV}{V} = nRT\left(\ln V_f - \ln V_i\right) = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

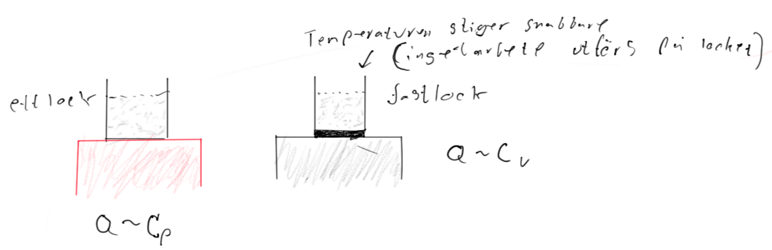
Termodynamikens 1:a huvudsats

Låter viktigt och är viktigt!



$$\underline{dQ = dE_{int} + dW_g}$$

$$\underline{Q_{i\to f} = \Delta E_{int} + W_{i\to f}}$$



Lecture notes

Lukas Rahmn

17 November 2016

Kretsprocesser

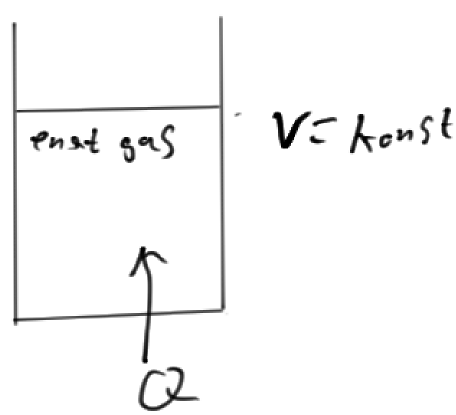
$$Q_{in}$$
$$Q_{ut}$$
$$e = \frac{W_{netto}}{Q_{in}}$$

Specifika värmet

$$Q = mc\Delta T$$
$$Q = \ nC_p\Delta T$$
$$Q = \ nC_v\Delta T$$

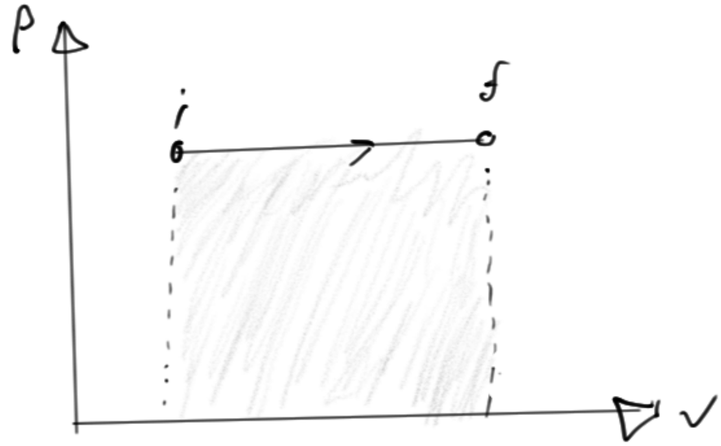
C_v :

$E_{int} = n(\frac{3}{2}R)T$



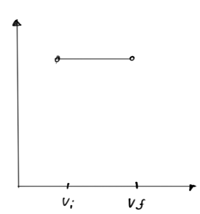
1:a huvudsatsen

$$dQ = dE^{int} + dW_g$$
$$\text{här } dW_g = 0$$
$$dQ = dE^{int}$$
$$Q = \Delta E^{int} = n\frac{3}{2}R * \Delta T$$
$$\underline{C_v = \frac{3}{2}R}$$
$$\underline{C_v = \frac{5}{2}R}\text{två atomig gas}$$



$PV_f = nRT_f$ Allmäna gas lagen

$$Q = \Delta E^{int} + W_g$$
$$Q =, mC_p\Delta T \; E^{int} n\frac{3}{2}R * \Delta T = nC_v\Delta T$$
$$nC_p(T_f - T_i) = nC_v(T_f - T_i) + Wg$$
$$dW_g = PdV = \int_i^f Pdv = P(V_f - V_i)$$
$$nC_p(T_f - T_i) = nC_v(T_f - T_i) + P(V_f - V_i)$$
$$nC_p(T_f - T_i) = nC_v(T_f - T_i) + nR(T_f - T_i) \rightarrow$$
$$\underline{C_p = C_v + R}$$

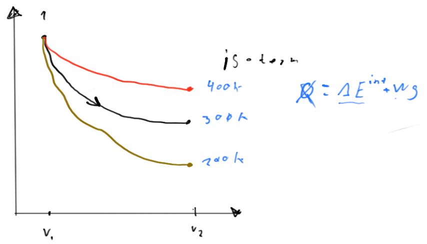


$P = 1,0$ atm enat gas
$V_i = 1m^3$ $T_i = 300K$
$V_f = 3m^3$
Bestäm
T_f Q ΔE^{int} W_g

$n = \frac{PV_i}{RT_i} = 40,63$ $T_f = 900$ $Q = n \cdot C_p \cdot \Delta T = 40,63 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot 600 \approx 5 \cdot 10^5$
$\Delta E^{int} = 3 \cdot 10^5$
$W_g = 1,013 \cdot 10^5 (3-1) \approx 2 \cdot 10^5$

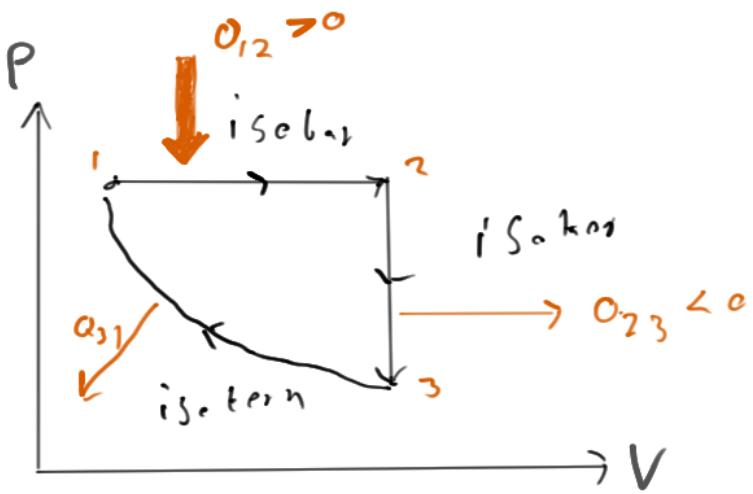
	enat	tvåat
C_v	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
C_p	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$

Adiabatisk process



För en isoterm gäller PV=konst. För en adiabat gäller $PV^{\left(\frac{C_p}{C_v}\right)} = konst = PV^{\gamma}$

	isokor	isobar	isoterm	adiabat
Q	$nC_v(T_2 - T1)$	$nC_p(T_2 - T_1)$	$nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	0
ΔE^{int}	$nC_v(T_2 - T_1)$	$nC_v(T_2 - T_1)$	0	$nC_v(T_2 - T_1)$
W_{gas}	0	$P(V_2 - V_1)$	$nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$nC_v(T_1 - T_2)$

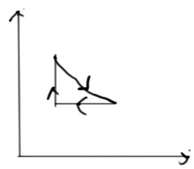


Verknings grad $e = \frac{W_g}{Q_{tillf}} = \frac{\sum Q}{\sum Q_{pos}}$

Lecture notes
Lukas Rahmn
21 November 2016

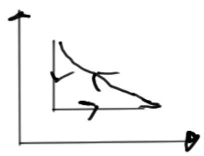
Kretsproccesser, Värmeledning, Stöttalet

Kretsprocesser



Värme maskin

mål: producera mekansikt arbete
pris: tillförd värme
Note: går medurs

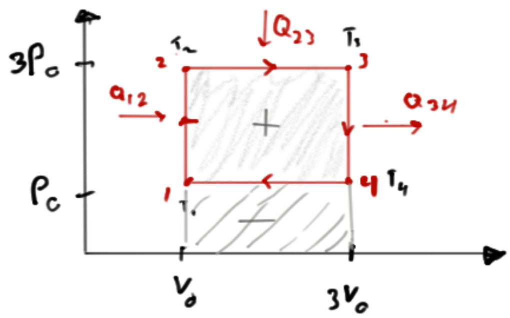


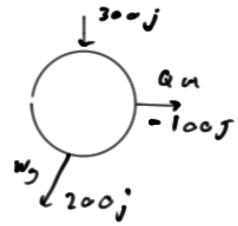
Kylmaskin

Två typer

1. Kylskåp
2. Värmepump

Kretsprocess





Enatomig gas

$$C_v = \frac{3}{2}R,\ C_p = \frac{5}{2}R$$

$$e = \frac{\sum W_i}{\sum Q_{pos}} = \frac{\sum Q}{\sum Q_{pos}}$$

$$1 \to 2 : Q_{12} = nC_v(T_2 - T_1)\ (>0) = n\frac{3}{2}R(3T_1 - T_1)$$

$$2 \to 3 : Q_{23} = nC_p(T_3 - T_2)\ (>0) = n\frac{5}{2}R(9T_1 - 3T_1)$$

$$3 \to 4 : Q_{34} = nC_v(T_4 - T_3)\ (<0) = n\frac{3}{2}R(3T_1 - 9T_1)$$

$$4 \to 1 : Q_{41} = nC_p(T_1 - T_4)\ (<0) = n\frac{5}{2}R(T_1 - 3T_1)$$

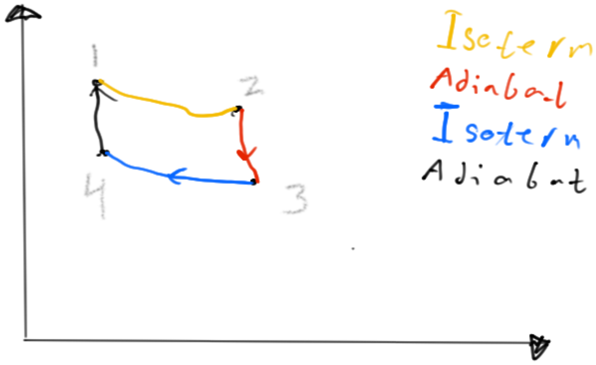
$$e = \frac{Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2} * 2 + \frac{5}{2} * 6 - \frac{3}{2} * 6 - \frac{5}{2} * 2}{\frac{3}{2} * 2 + \frac{5}{2} * 6} = \frac{3 + 15 - 9 - 5}{3 + 5} = \frac{4}{18}$$

$$e = \frac{\sum W_g}{\sum Q_{pos}}, \sum W_g = 2P_0 * 2V_0 = 4P_0V_0 = 4nRT_1, e = \frac{4}{18}$$

Carnotprocessen

T_l: Låg temperatur
T_h: Hög temperatur



$$W_{12} = nRT_n \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \qquad w_{23} = nC_v(T_h - T_l)?$$
$$w_{34} = nRT_l \cdot \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right), \qquad w_{41} = nC_V(T_v - T_l)$$
$$e = \frac{nRT_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nRT_l \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)}{nRT_h \ln\left(\frac{V_2}{V1}\right)}$$

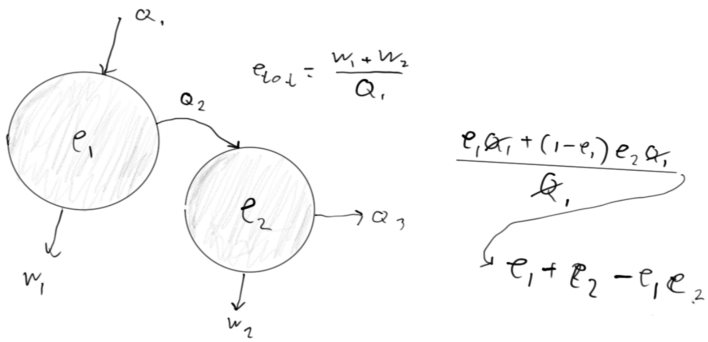
Förenkling:

$$P_1V_1 = P_2V_2\text{Isoterm}, P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma\text{adiabat}$$
$$P_3V_3 = P_4V_4\text{Isoterm}, P_4V_4^\gamma = P_1V_1^\gamma\text{adiabat}$$
$$\to V_1V_2^\gamma V_3V_4^\gamma = V_2V_3^\gamma V_4V_1^\gamma \to V_1^{\gamma-1}V_3^{\gamma-1} = V_2^{\gamma-1}V_4^{\gamma-1}$$
$$\to V_1V_3 = V_2V_4 \to \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}$$
$$e = \frac{T_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + T_l \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{T_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = \frac{T_h - T_l}{T_h}$$

Ration $\frac{T_h - T_l}{T_h}$ kallas energi kvalite

$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = -\ln\left(\frac{B}{A}\right)$

Uppgift 1

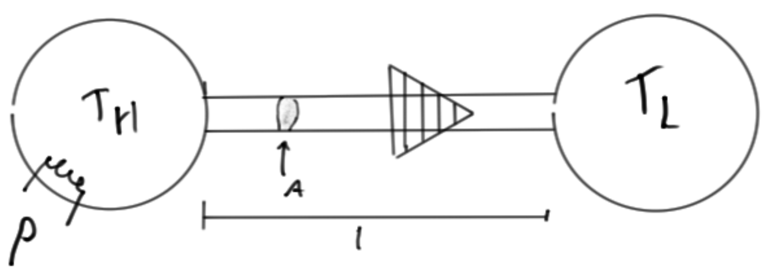


(Med min lösning) Skilljer sig lite från den som visades

Kylmaskiner

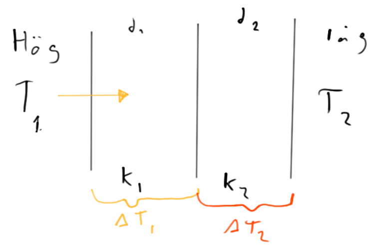
$$\text{"coefficient of performance"} = \frac{\text{Önskat resultat}}{\text{input}} = \frac{?}{\text{arbete utfört av kompressor}}$$

Vämreledning



k är värmeledningsförmågan $W/m \cdot K$

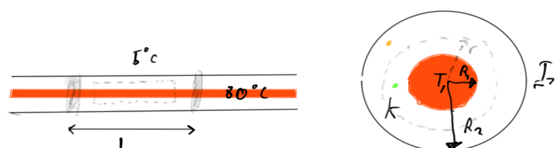
$$P = \frac{dQ}{dt} = Ak\frac{T_h - T_l}{l}$$



Nästa steg

$$Ak_1\frac{\Delta T_1}{d_1} = Ak_2 = \frac{\Delta T_2}{d_2}$$
$$Ak_1\frac{T_1 - T_x}{d_1} = Ak_2\frac{T_x - T_2}{d_2}$$

Exempel



$$P = \frac{dQ}{dt} = -k(2\pi L)\frac{dT}{dr} \qquad \frac{dT}{dr} \quad \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dr}{r} = -\frac{k2\pi L}{P}dT$$

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = -\frac{k2\pi L}{P}\int_{T_1}^{T_2}dt = \ln\frac{R_2}{R_1} = -\frac{k2\pi L}{P}(T_2 - T_1) \Rightarrow$$

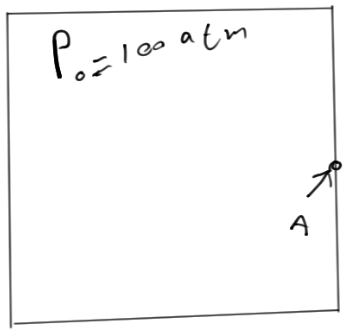
$$\Rightarrow P = \frac{k2\pi L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}(T_1 - T_2)$$

Stötttalet

$$n^* = \frac{1}{4}\left(\frac{N}{V}\right) < v >$$

antal stötar per sekund och m^2

$$PV = nRT \to PV = \frac{N}{N_A}RT \to P = \left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{R}{N_A}\right)T = \left(\frac{N}{V}\right)k_BT$$
$$\to \frac{N}{V} = \frac{P}{k_BT}$$

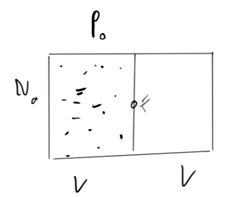


$$\langle v \rangle = 500 \, m/s$$
$$A = 1 mm^2$$
$$P = \left(\frac{N}{V}\right) k_B T$$

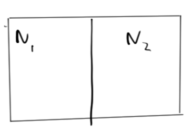
Hur många molekyler försvinner ut den första sekunden efter att hålet uppstt.

$$n^* \frac{1}{4}\left(\frac{P}{k_B T}\right) < v >= \frac{1}{4}\left(\frac{100 * 1,013 * 10^5}{1,23 * 10^{-23} * 300}\right) 500$$

Hur lång tid tar det innan trycket har halverats? Försumma inläckage. Rel mellan tryck och antal partiklar : $PV = \frac{N}{N_A} RT, P \sim N$



N i vänstra delen som funktion av t.



$$dN_1 = -\frac{1}{4}\frac{N_1}{V}\langle v \rangle dt \cdot A + \frac{1}{4}\frac{N_2}{V}\langle v \rangle A \cdot dt$$
$$N_2 = N_0 - N_1$$
$$dN_1 = -\frac{1}{4}\frac{\langle v \rangle}{V}\left(N_1 - (N_0 - N_1)\right) dt$$
$$\frac{dN_1}{2N_1 - N_0} = \frac{1}{4}\frac{\langle v \rangle A}{V} dt \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\left[\ln \frac{1}{2N_1 - N_0}\right]_{N_0}^{N_1} = -\frac{1}{4}\frac{\langle v \rangle A}{V} t \Rightarrow$$

To be continued...

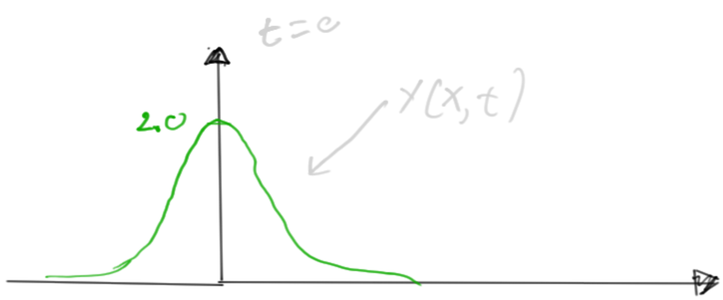
Lecture notes
Lukas Rahmn

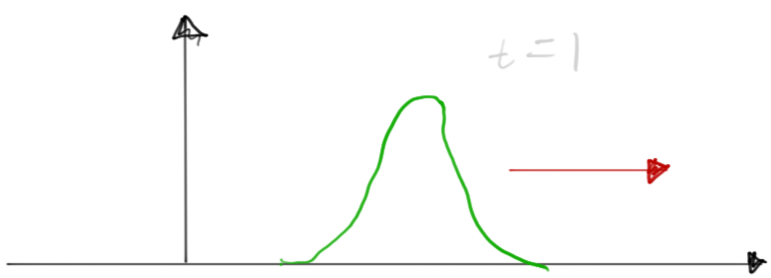
Mekaniska och Elektromagnetiska vågor.

Transversell våg, störning vinkelrät mot utbredningen. Longitudinell våg: störn parralell med utbredningen.

Transversell våg

$$y(x,t) = \frac{2.0}{(x-3.0t)^2+1}$$

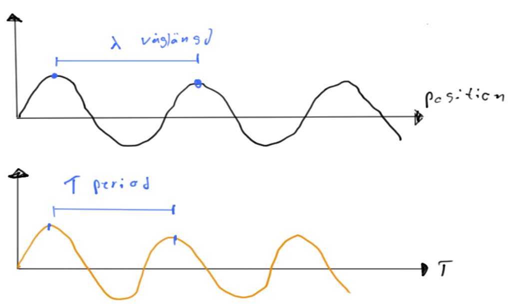




Våg:

$$y(x,t) = f(x-vt) \text{ Utbredning} \leftarrow$$
$$y(x,t) = f(x+vt) \text{ Utbredning} \rightarrow$$

Harmoniska vågor



$$t=0,\ y=A\sin ax,\ \sin(ax)=\sin\left[a(x+\lambda)\right]\rightarrow$$

$$a(x+\lambda)=ax+2\pi\rightarrow ax+a\lambda=ax+2\pi\rightarrow a=\frac{2\pi}{\lambda}=k$$

Tid:

$$y(x,t)=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-f\lambda t)\right]=$$

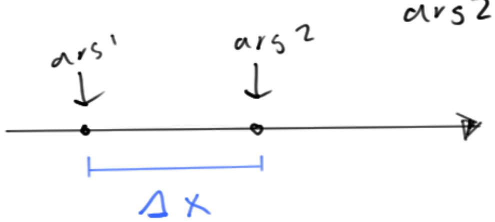
$$=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}x-2\pi ft\right]=A\sin(kx-\omega t)$$

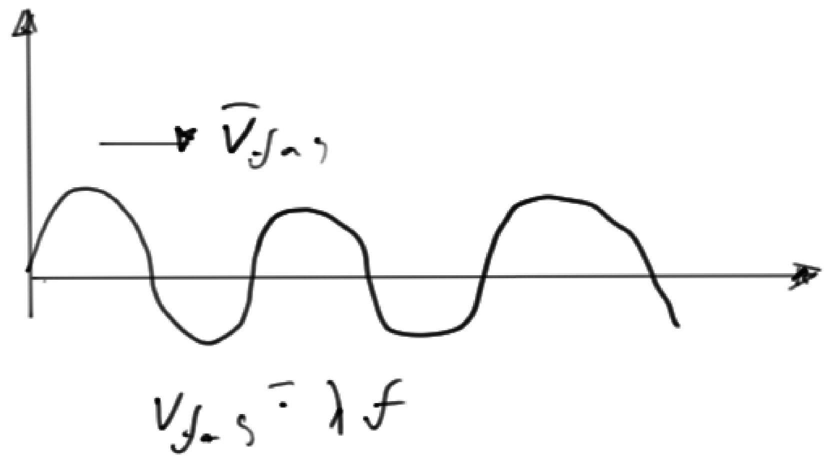
$v*t=\lambda$ och $f=\frac{1}{T}\rightarrow v=\lambda f$

$$\text{Alla samma:}\begin{cases}y(x,t)=A\sin(kx-\omega t)\\ y(x,t)=-A\sin(kx-\omega t)\\ y(x,t)=A\cos(kx-\omega t)\\ y(x,t)=A\sin(\omega t-kx)\end{cases}$$

Allmänt $y(x,t)=A\sin(kx-\omega t+\Phi)$

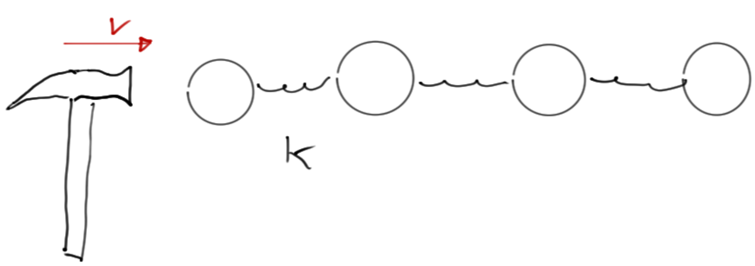
arg2 − arg1 = k Δk

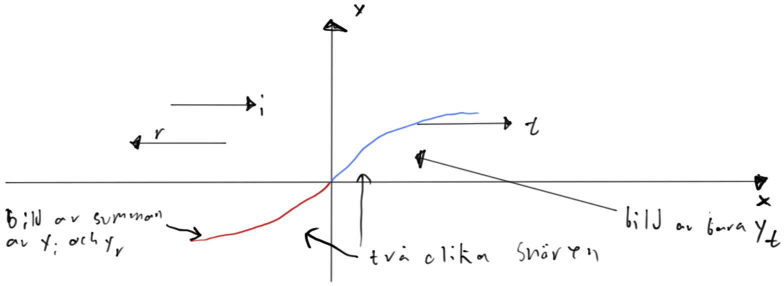




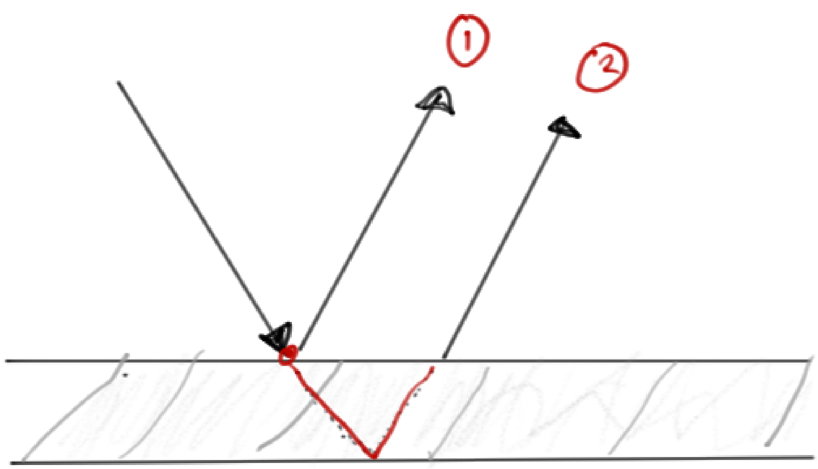
$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$
$$\text{Partikelhastighet: } \frac{dy}{dt} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$
$$\text{Partikelacceleration: } \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 A\sin(kx - \omega t)$$

Fashastigheten





$$y_i = A_i \sin\left[\omega(t - \frac{x}{v_1})\right]$$
$$y_t = A_t \sin\left[\omega(t - \frac{x}{v_2})\right]$$
$$y_r = A_r \sin\left[\omega(t + \frac{x}{v_2})\right]$$
$$x = 0:\ y_i + y_r = y_t \rightarrow A_i \sin\omega t + A_r \sin\omega t = A_t \sin\omega t \rightarrow A_i + A_r = A_t$$
$$x = 0:\ \frac{d}{dx}(y_i + y_r) = \frac{d}{dx}y_t \rightarrow \frac{1}{v_1}(A_i - A_r) = \frac{1}{v_2}A_t$$
$$A_t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}A_i\ A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}A_i$$



Intensitet

$$\frac{\text{effekt}}{m^2},\ I \sim (\text{amplitud})^2$$

Lecture notes

Lukas Rahmn

1 December 2016

Repition

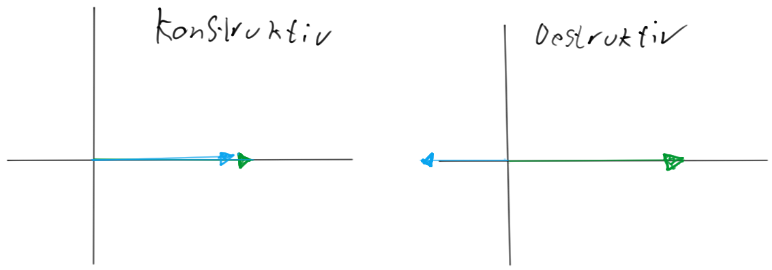
1. Fasprång π vid reflektion mot ett medium där v minskar
2. Intensitet $\sim (amplitud)^2$
3. $V_{fas} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Inteferens

Formel för addition av sinus funtioner:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t),\ y_2 = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$
$$y_{tot} = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$



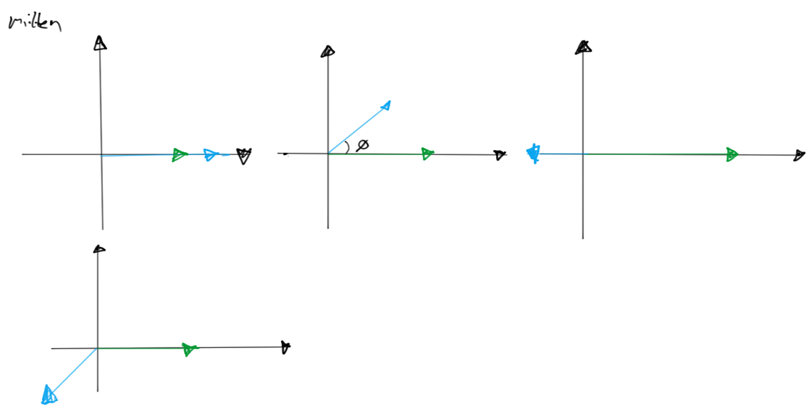
Extrem fall:

Konstruktiv inteferens:

$$\cos(\frac{\phi}{2}) = \pm 1 \rightarrow \frac{\phi}{2} = m\pi \rightarrow \phi = m2\pi$$

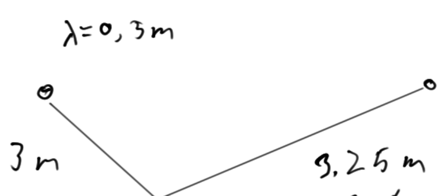
Destruktiv inteferens:

$$\cos(\frac{\phi}{2}) = 0 \rightarrow \frac{\phi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$



Promenad mellan två högtalare.

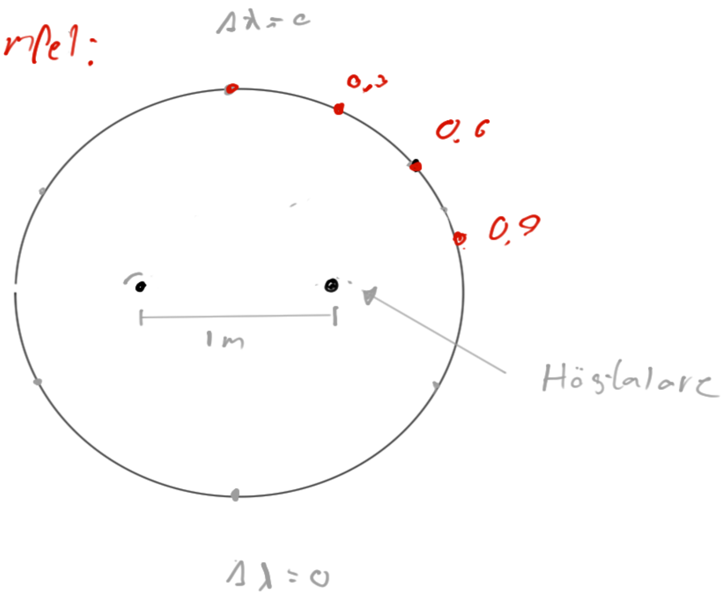
Exempel

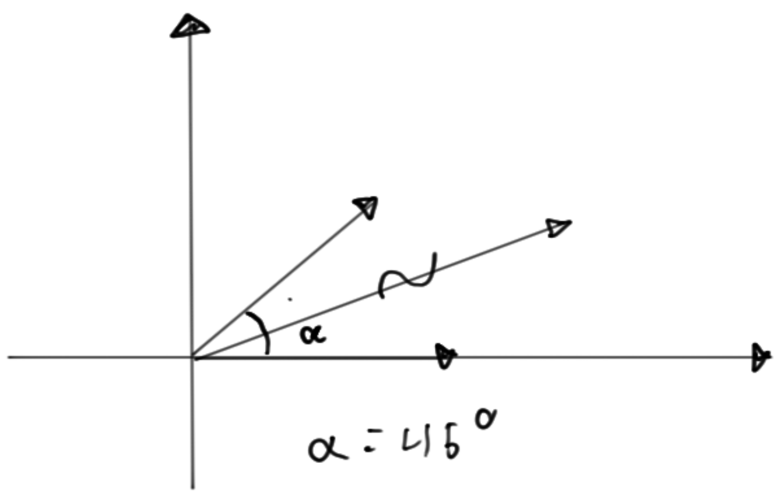


$\Delta\phi_1 = 2\pi\frac{3}{\lambda} =$ $\quad \Delta\phi_2 = 2\pi\frac{3,25}{0,5} = 6,5 \cdot 2\pi$

$2\pi\frac{3}{0,5} = 6 \cdot 2\pi \quad \Delta\phi = 0,5 \cdot 2\pi = \pi$

Exempel:





Max intensitet

$$y_{tot} = 2A\cos\frac{\phi}{2}\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

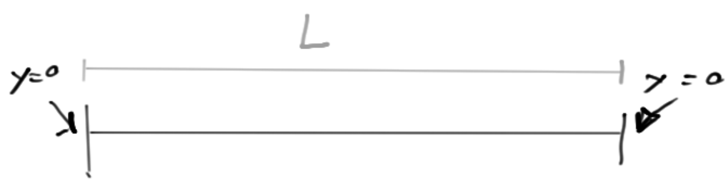
Max intensitet:

$$I = I_{max} * \cos^2\left(\frac{45}{2}\right), I_{max} \sim 4A^2$$

Stående vågor

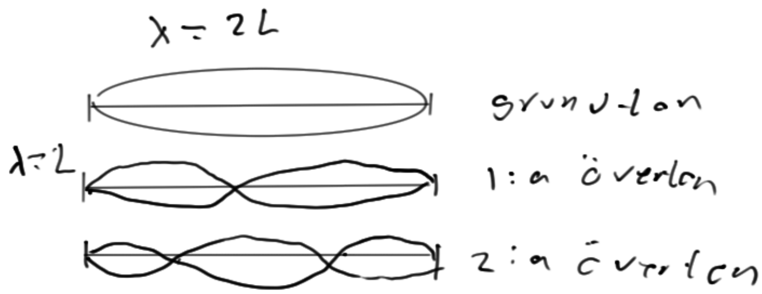
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$y_1 = A\sin(kx - \omega t),, y_2 = A\sin(kx + \omega t)$
$y_{tot} = y_1 + y_2 = A(\sin kx\cos\omega t - \cos kx\sin\omega t + \sin kx\cos\omega t + \cos kx\sin\omega t) =$
$= 2A\sin kx\cos\omega t$



Stående våg på sträng

$$\text{Krav: } \sin kL = 0 \to kl = m\pi$$
$$k = m\frac{\pi}{L}\ \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{m}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

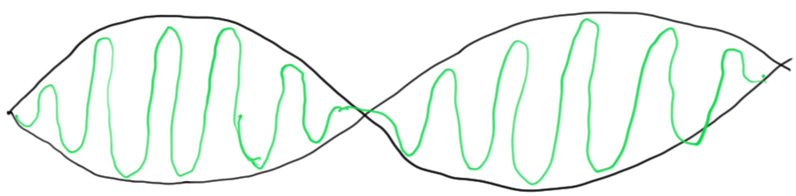


$$v = f\cdot\lambda, v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$
$$\to f * \frac{2L}{m} \to f = \frac{m\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2L}$$

Svävningar (Beats)

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$y_1 = A\cos(k_1 x - \omega_1 t),\ y_2 = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$
$$x = 0$$
$$y_1 = A\cos(\omega_1 t),\ y_2 = A\cos(\omega_2 t)$$
$$\omega = 2\pi f$$
$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right]$$



Lecture notes

Lukas Rahmn

1 December 2016

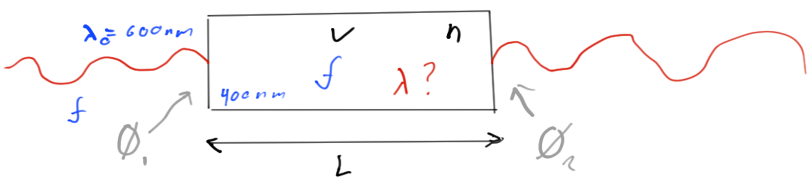
EM-vågor

Brytningsindex: n

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

$$\text{fashastighet: } v = \frac{c}{n}$$

Optiskväg

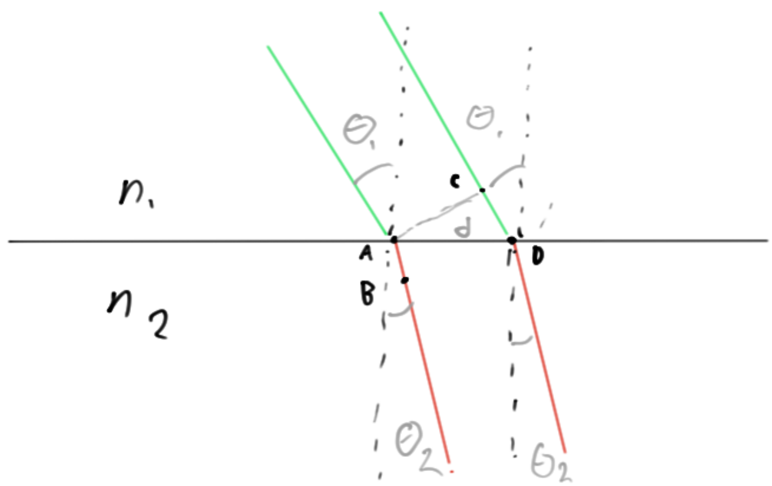


$$v = f\lambda, f = \frac{v}{\lambda}, f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{\frac{c}{n}}{\lambda} \to \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi\frac{L}{\lambda} = 2\pi\frac{L}{\frac{\lambda_0}{n}} = 2\pi\frac{nL}{\lambda_0}$$

nL kallas optisk väg

Brytningslagen



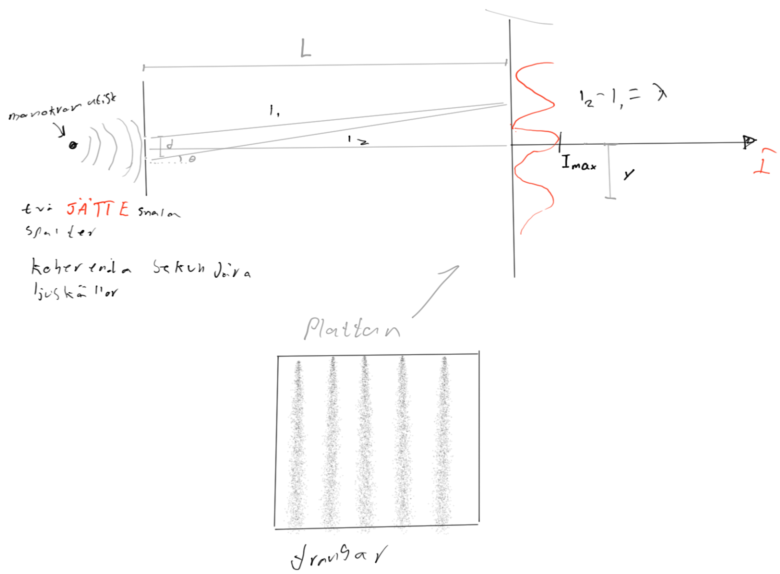
$$n_1 * |\bar{CD}| = n_2 * |\bar{AB}| = \underline{n_1 d \sin\theta_1 = n_2 d \sin\theta_2}$$

Totalreflexion

$$1.5 \sin\theta_1 = \sin\theta_2$$

$$\text{kritisk vinkel: } \sin\theta_1 = \frac{1}{1.5}$$

Inteferenseffekter med hjälp av ljus



Youngs dubbelspalt

$$\text{max: } d \sin \theta = m\lambda$$

$$\text{min: } d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

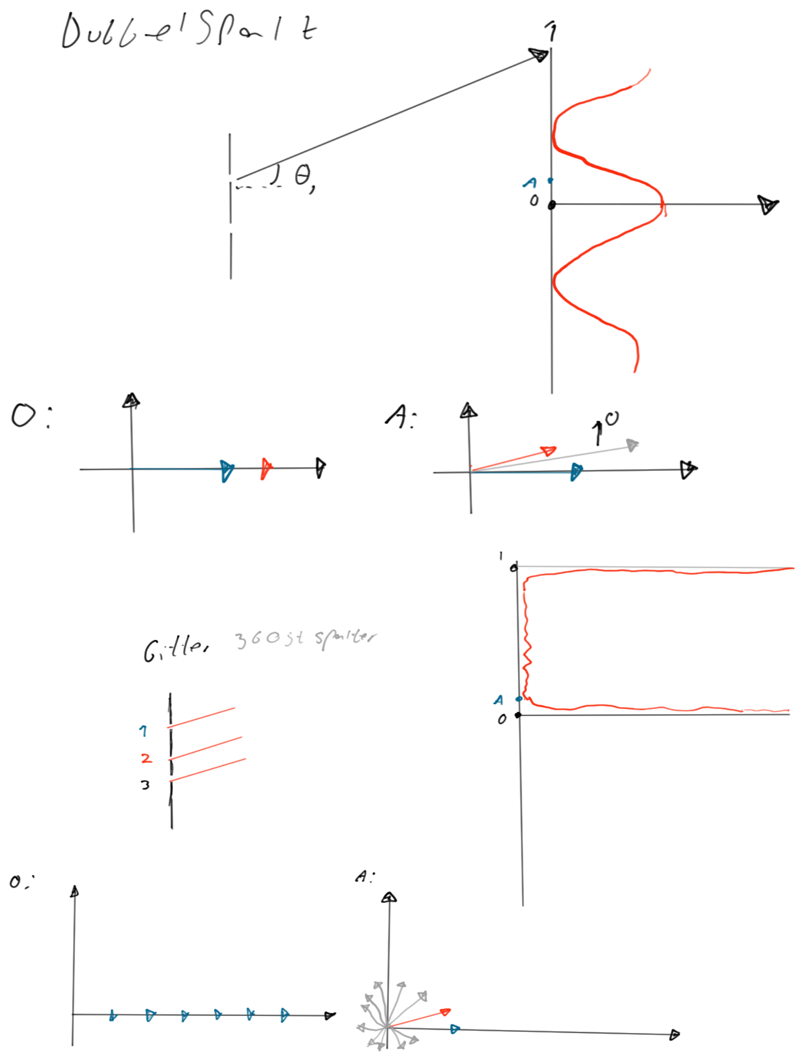
$$I = I_{max} \cdot \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

Exempel

små vinklar: $\sin \theta \sim \tan \theta = \frac{Y}{L}$

$$y = 2.0cm, \lambda = 600nm, L = 2.0m, \text{sökt: } d$$

$$\text{1:a max: } d \cdot \sin \theta = 1\lambda \rightarrow d\frac{y}{L} = \lambda \rightarrow d = \frac{L\lambda}{y} = 600 \cdot 10^-7m$$



Exempel

Frågor:

1. Intensitet i 0 med alla splater öppna utryckt i I_0
2. Man kan blockera spalter. Vilka spalter ska blockeras för att man ska få max inensitet i A?
3. Hur stor är den uttryckt i I_A

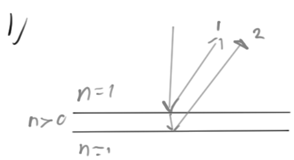
Lecture notes

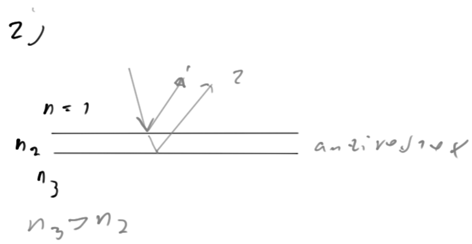
Lukas Rahmn

5 December 2016

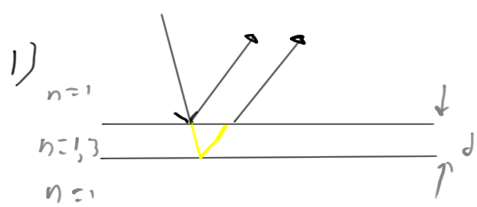
1. Inteferens i tunna filmer
2. Diffraktion
3. Upplösningsförmåga
4. Rotations rörelser

Reflektion i tunna filmer





Fall 1



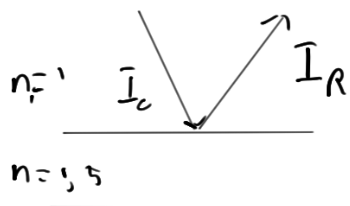
Gula vägen = 2dn

.

$$
\begin{aligned}
\text{Fasskillnad:} \quad & 2\pi\frac{2dn}{\lambda} \pm \pi \\
\text{max:} \quad & 2\pi\frac{2dn}{\lambda} \pm \pi = m2\pi \\
& 2d = \left(m \pm \frac{1}{2}\right)\lambda \\
\text{min:} \quad & 2dn = m\lambda
\end{aligned}
$$

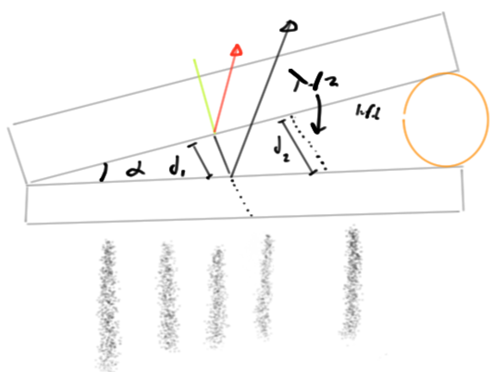
Fall 2

$$\text{max: } 2dn = m\lambda \;\; m = 1, 2, 3, ...$$
$$\text{min: } 2dn = (m + \frac{1}{2})\lambda \;\; m = 0, 1, 2, 3, ...$$
$$\text{minsta tjocklek som ger min:}$$
$$d = \frac{\lambda}{4n}$$



$$I_R = I_0 \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

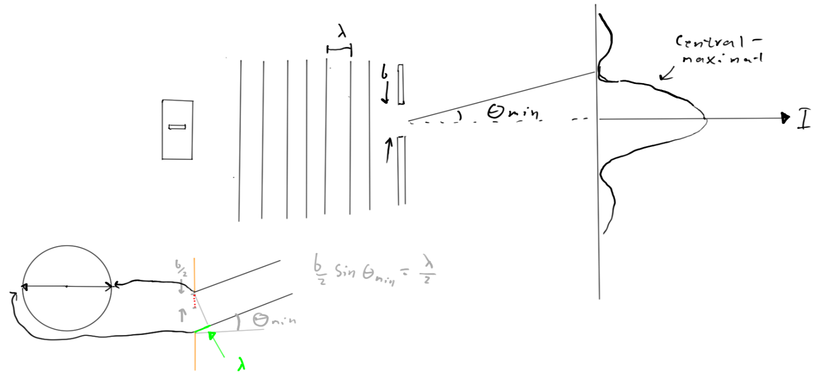
Antireflexbehandling av glasögon:

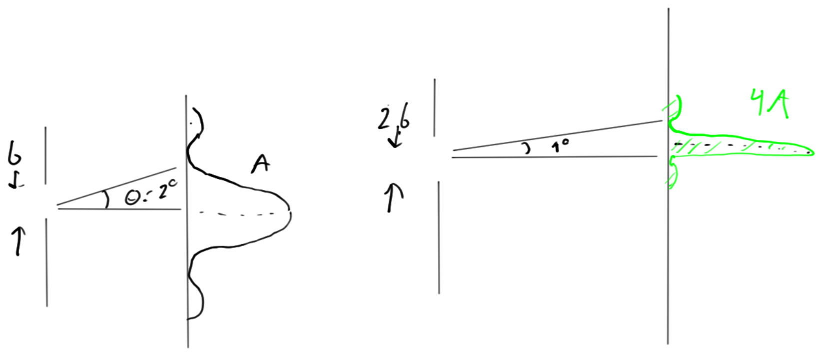


$$2d = (m + \tfrac{1}{2})\lambda$$
$$d_2 - d_1 = ?$$

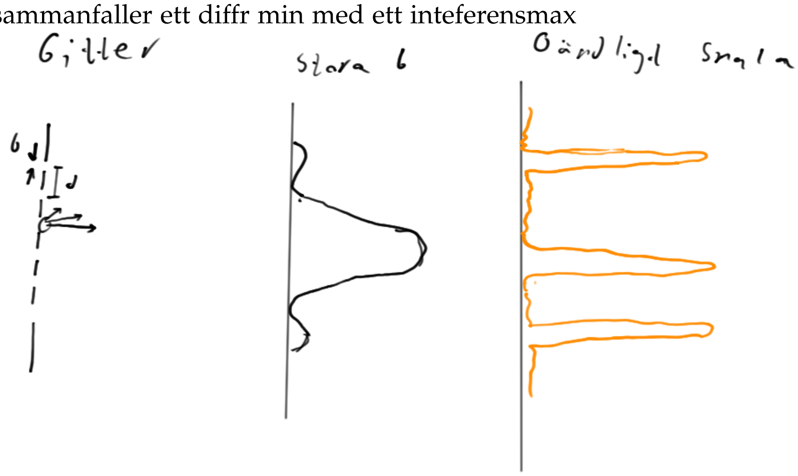
Diffraktion

$$\text{min: } b \sin\theta_{min} = \lambda \mid \text{Young, max: } d \sin\theta = \lambda$$





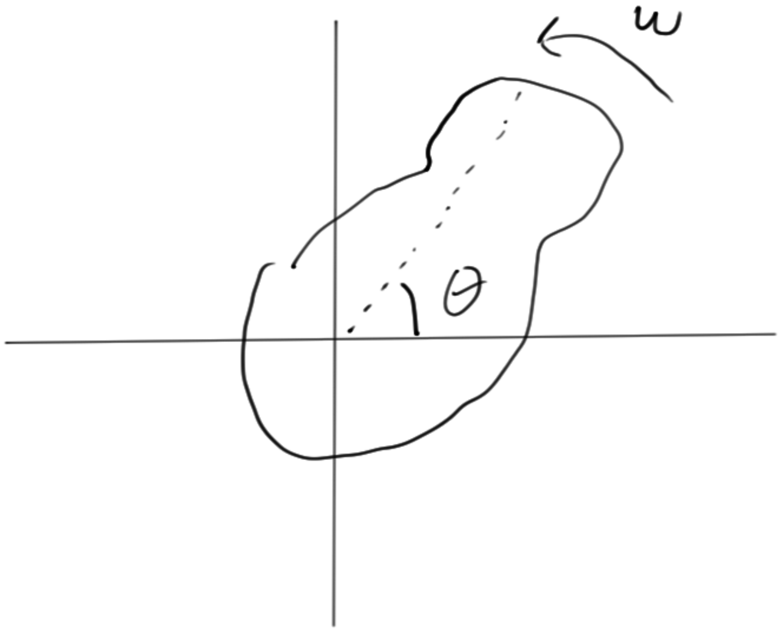
När sammanfaller ett diffr min med ett inteferensmax

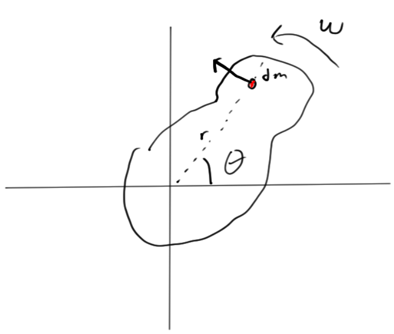


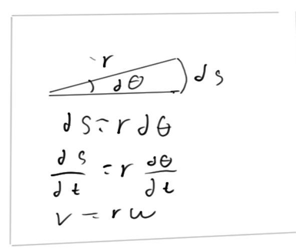
$$b \sin\theta = \lambda, d \sin\theta = m\lambda \to \frac{d}{b} = m$$

Rotationsrörelse

Rotationskinematik







$$\text{läge: } \theta \text{ jfr. } x$$

$$\text{hastighet: } \omega = \frac{d\omega}{dt}\ \bar{v}$$

$$\text{acceleration: } \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\ \bar{a}$$

$$\theta_f - \theta_i = \omega_0 t + \frac{1}{22}\alpha t^2$$

$$\omega_f^2 - \omega_i^2 = 2\alpha\Delta\theta \text{Rotations energi:}$$

$$dK_R = \frac{1}{2}dm \cdot v^2$$

$$v = \omega r$$

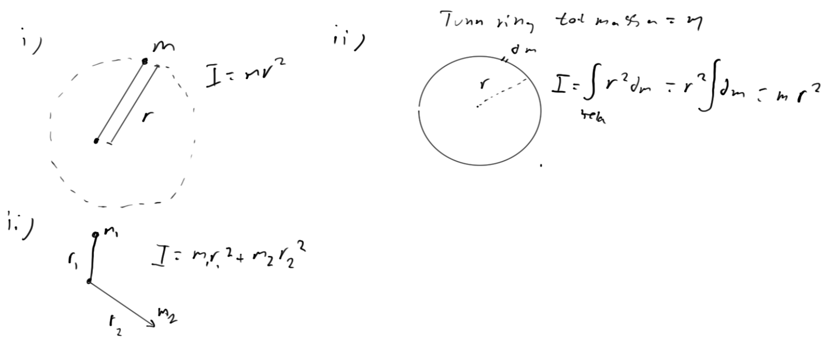
$$\text{Hela rotations energin:}$$

$$K_R = \int_{hela} dK_r = \int_{hela} \frac{1}{2}\omega^2 dm r^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{hela} r^2 dm$$

$$\int r^2 dm = \text{tröghets}\underline{\text{momentest}}\ = I$$

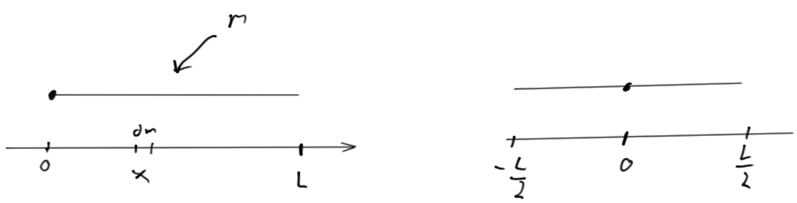
$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 \ \ \text{jämför med}\ \ K = \frac{1}{2}mv^2$$

Exempel



Smal pinne

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \to dm = \frac{M}{L}dx$$



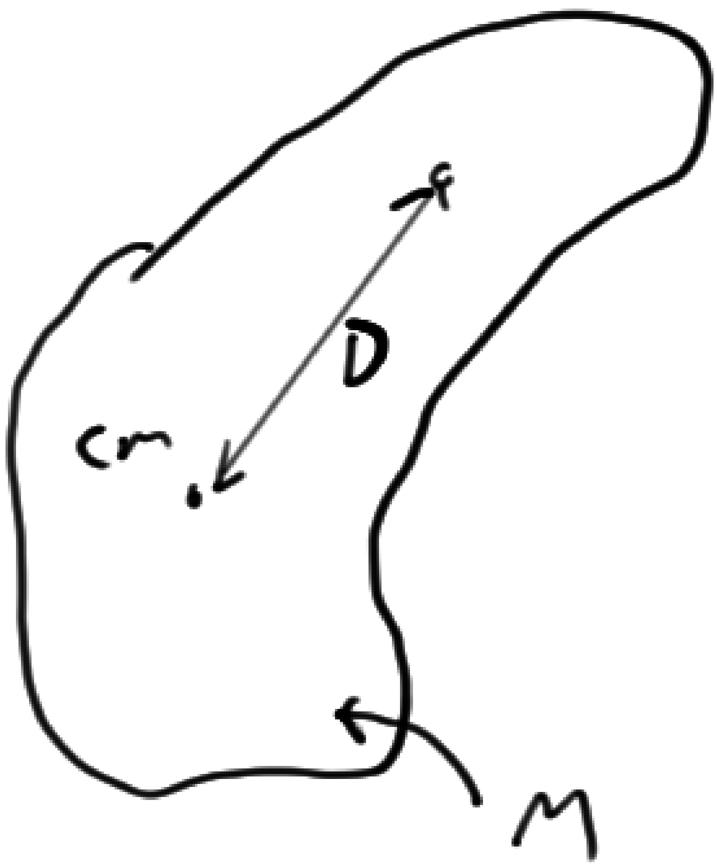
Fall 1:

$$I = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{M}{L}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^L = \frac{1}{3}ML^2$$

Fall 2:

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{M}{L}\left[\frac{L^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{ML^2}{12}$$

Parallellförskjutningssatsen



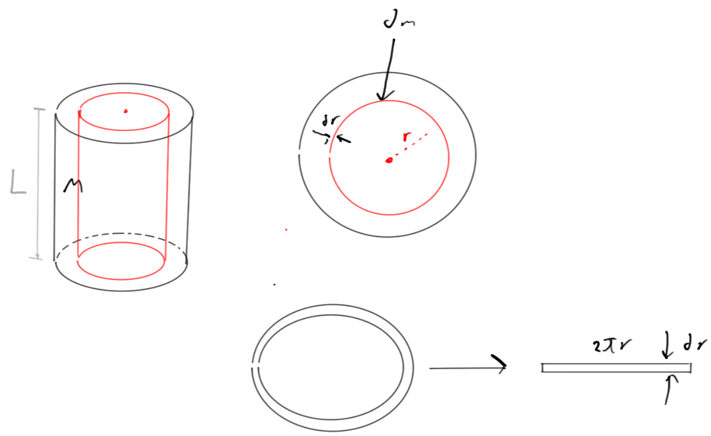
$$I_0 = I_{cm} + MD^2$$

Smal pinne:

$$I_{cm} = \frac{ML^2}{12}$$
$$I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = ML^2\left(\frac{1+3}{12}\right) = \frac{ML^2}{3}$$

I för en homogen cylinder

$$dI = r^2 dm$$
$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 L} = \text{tätheten}$$
$$dV = (2\pi r)dr * L$$
$$dm = 2\pi r dr L \frac{M}{\pi R^2 L} = \frac{2M}{R^2} r dr$$
$$I = \int_0 di = \frac{2M}{R^2} \int_0 r * r^2 dr = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^R = \frac{2M}{R^2} \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} MR^2$$



Kryssprodukt

$$\bar{A} \times \bar{B}$$
$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$
$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$
$$|\bar{A} \times \bar{B}| = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \cdot \sin \rho$$

Vridande moment

$$\bar{\tau} \equiv \bar{r} \times \bar{F}$$

Rörelsemängdsmoment

$\bar{L} \equiv \bar{r} \times \bar{p}$

Samband mellan $\bar{\tau}$ och $\bar{L}$

$\dfrac{d\bar{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \dfrac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \dfrac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{\tau}$

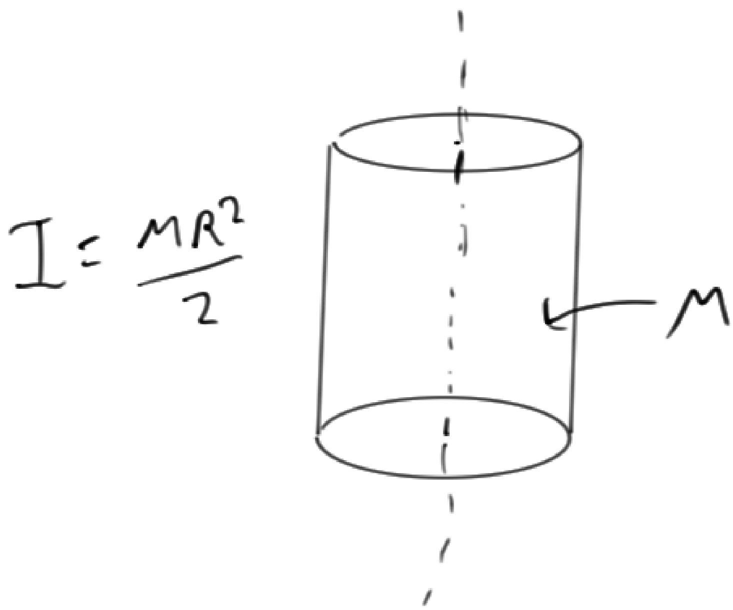
$\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$

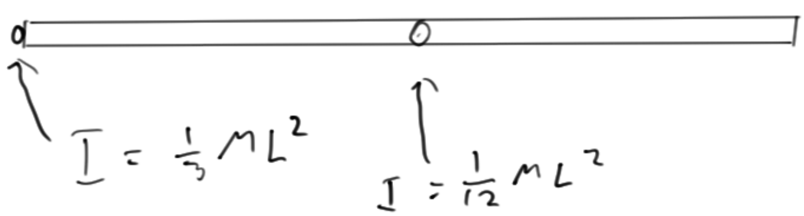
Lecture notes

Lukas Rahmn

7 December 2016

Rotations rörelser





Tröghetsmoment

$$I = \int_{hela} r^2 dm$$

Vridandemoment

$$\tau \equiv \bar{r} \times \bar{F}$$

Rörelsemängdsmoment $\bar{L}$

$$\bar{L} \equiv \bar{r} \times \bar{p},\ \bar{p} = m\bar{v}$$
$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt},\ \bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

Partikel mekanik	Rotation
m	I
x	θ
v	ω
a	α
F	τ
P	L
$\frac{mV^2}{2}$	$\frac{i\omega^2}{2}$

Bevarade storeheter

Mekanisk energi	Se upp!
Rörelsemängd	Inga externa krafter
Rörelsemängdsmomenet	

Härledning av former

Gäller $\bar{\tau} = I\bar{\alpha}$? Sambandet mellan rotation och partikel fysik antyder det.

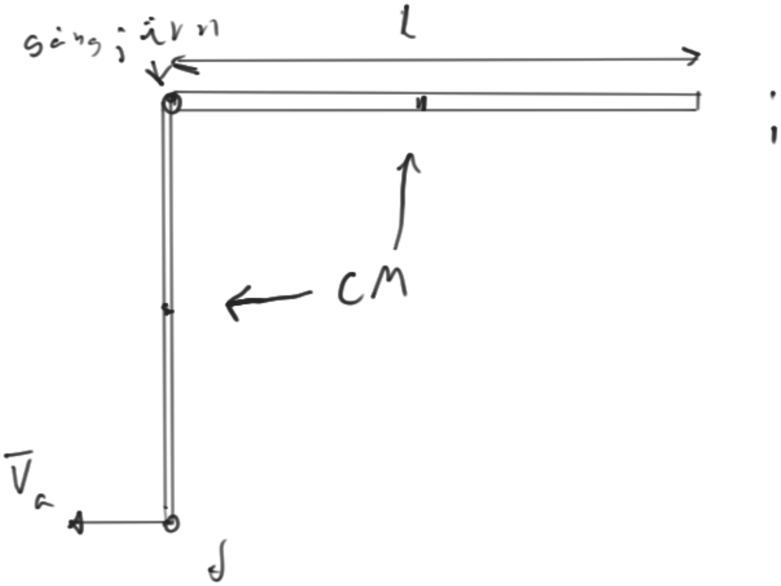
$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v}$$
$$d\bar{L} = \bar{r} \times dm\bar{v} = dm(\bar{r} \times \bar{v})$$
$$|d\bar{L}| = dmrv = dmr(\omega r) = \omega r^2 dm$$
$$|\bar{L}| = \int_{hela} |d\bar{L}| = \omega \int r^2 dm \to a|\bar{L}| = I\omega$$
$$\tau = \frac{dL}{dt}, L = I\omega \to \tau = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

Från partikel mekaniken $\sum_i \bar{F}_i^{ext} = M\bar{a}_{CM}$

Exempel

Exempel 1

Den mekaniska energin bevaras.



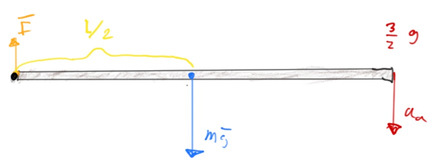
$v = \omega r$

$$K_i = 0 \qquad v_i = mgl\frac{1}{2}$$

$$L_f = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad v_f = 0$$

$$mgl\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = mgl\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2(\frac{v_a}{l})^2 v_a = \sqrt{3gl}$$

Acceleration av masscentrum:

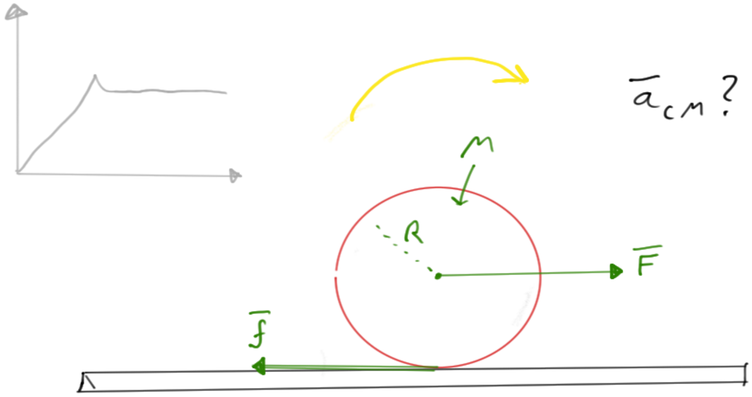


$$I = \frac{1}{3}ml^2,\ \tau = \frac{lmg}{2}$$

$$\frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2\alpha,\ \alpha = \frac{a_{CM}}{\frac{l}{2}} \rightarrow a_{CM} = \frac{3}{4}g$$

$$mg - F = m\frac{3}{4}g$$

Exempel 2



$$\bar{F} + \bar{f} = Ma_{\bar{C}M}$$

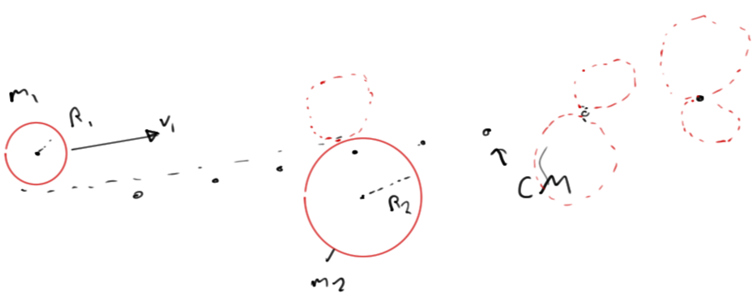
$$fR = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2, \; a_{CM} = \alpha R$$

$$fR = \frac{1}{2}MR^2\frac{a_{CM}}{R} \rightarrow f = \frac{1}{2}Ma_{CM} \rightarrow a_{CM} = \frac{2f}{M}$$

$$F - f = M\frac{2f}{M} \rightarrow f = \frac{F}{3}$$

Exempel 3



Lecture notes

Lukas Rahmn

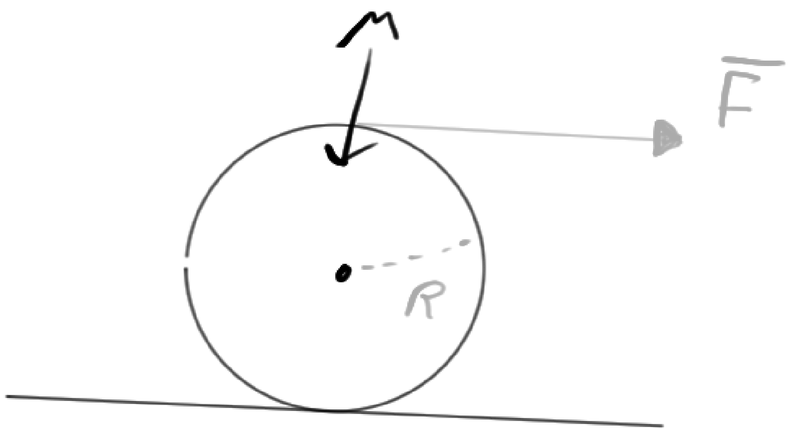
8 December 2016

Repetion

$$\sum \bar{F}^{ext} = M\bar{a_{CM}} \qquad \sum \bar{\tau}^{ext} = I\bar{\alpha} \tag{1}$$

$$\sum \bar{F}^{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt} \qquad \sum \bar{\tau}^{ext} = \frac{d\bar{L}}{dt} \tag{2}$$

Exempel 1



$\bar{F} = F\hat{i},\ \bar{f} = f\hat{i}$

Använd 1: $\bar{F} + \bar{f} = M\bar{a_{CM}}$

$F\hat{i} + f\hat{i} = Ma_{CM}\hat{i} \rightarrow F + f = Ma_{CM}$

$\sum \bar{\tau} = (R\hat{j} \times F\hat{i}) + (-R\hat{j} \times f\hat{i}) = RF(-\hat{k}) + Rf(+\hat{k}) = I\alpha\hat{k}$

$\rightarrow \underline{Rf - RF = \frac{1}{2}MR^2\alpha}$

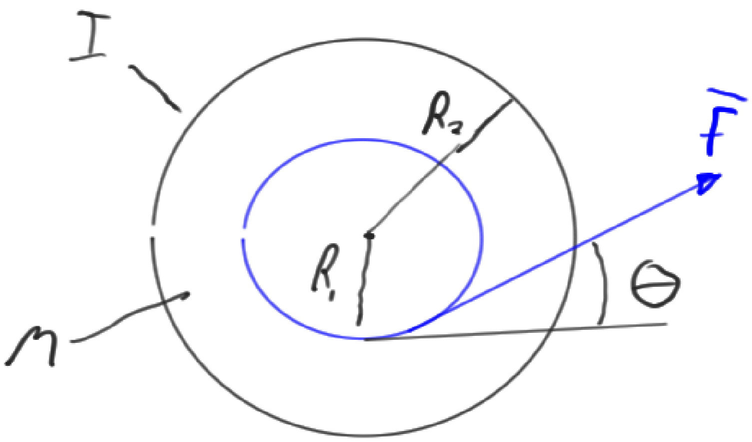
$|\bar{a_{CM}}| = R|\bar{\alpha}| \rightarrow a_{CM} = -R\alpha \rightarrow \alpha = -\frac{a_{CM}}{R} \rightarrow 2f - 2F = -Ma_{CM}$

$2f - 2F = -Ma_{CM}$ addera med $F + f = Ma_{CM} \rightarrow -F + 3f = 0 \rightarrow f = \frac{F}{3}$

Friktionen är riktad åt samma håll som krafen $\bar{F}$

Exempel 2

Tecknet på a_{cm}



$$
\begin{aligned}
&\bar{f} = f\hat{i}\\
&F\cos\theta + f = Ma_{cm}\\
&-R_2F\cos\theta - R_2 f = -MR_2a_{CM}\\
\hline
&R_1F(+\hat{k}) + R_2f(+\hat{k}) = I\alpha\hat{k} = -I\frac{a_{CM}}{R_2}\hat{k}\\
&R_1F + R_2f = -I\frac{a_{CM}}{R_2}
\end{aligned}
$$

Addera ekvationerna:

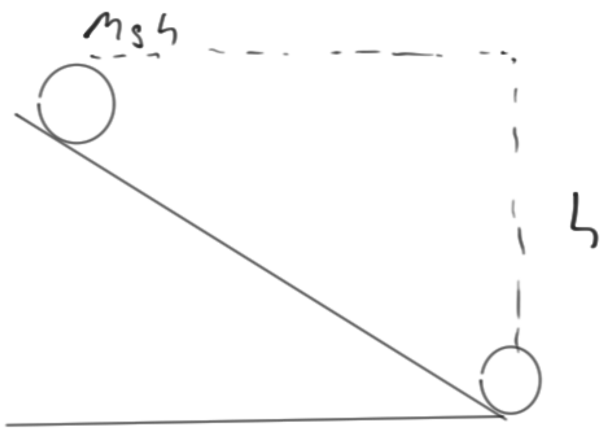
$$
\begin{array}{ll}
-R_2F\cos\theta & -R_2f = -\,Ma_{CM}R_2\\
\;\;R_1F & +R_2f = -\,I\dfrac{a_{CM}}{R_2}\\
\hline
-R_2F\cos\theta & +R_1F = -\left[R_2M + \dfrac{I}{R_2}\right]a_{CM}
\end{array}
$$

$$
\rightarrow a_{CM} = \frac{F}{R_2M + \frac{I}{R_2}}R_2\left(cos\theta - \frac{R_1}{R_2}\right)
$$

Exempel 3

Burk i backe.

$$K = K_R + K_T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$$



$$Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2 = \frac{1}{2}I\frac{V_{CM}^2}{R^2} + \frac{1}{2}MV_{CM}^2 = \frac{1}{2}V_{CM}^2\left[\frac{I}{R^2} + M\right]$$
$$\rightarrow V_{CM}^2 = \frac{2Mgh}{\frac{I}{R^2} + M}$$

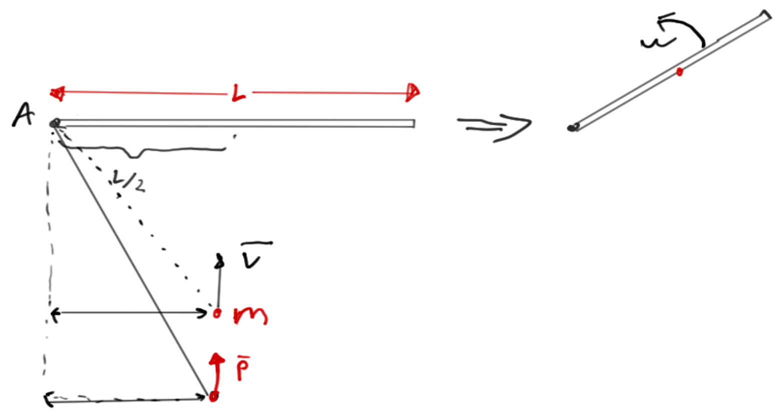
Två burkar:

$$I_{full} \sim \frac{1}{2}MR^2 \rightarrow \quad \frac{I}{R^2} + M = \frac{\frac{1}{2}MR^2}{R^2} + M = \frac{3}{2}M,\ V_{CM}^2 = \frac{2gh}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}gh$$
$$I_{tom} \sim \frac{1}{2}mR^2 \rightarrow \quad \frac{I}{R^2} + m = \frac{mR^2}{R^2} + m = 2m,\ V_{CM}^2 = \frac{2gh}{2} = gh$$

Exempel 4

Lerklump kastad mot dörr. Mekansik energi och Rörelsemäng bevaras inte. Inga yttre vridande moment m.a.p A, Alltså bevaras $\bar{L}$.

$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$
$\bar{L} = I\bar{\omega}$



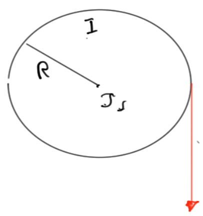
$$L_i = \frac{l}{2}mv \qquad L_f = \left[\frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega \to \omega = \frac{\frac{l}{2}mv}{\frac{1}{3}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

Lecture notes
Lukas Rahmn
12 Deceember 2016

Problemlösning + entropi

Exempels

Exempel 1



$$\tau_{tot} = \tau_k - \tau_f = 0{,}076 \cdot 2{,}5 - 0{,}11 = 0{,}08$$

$$I\alpha = \tau_{tot} \Rightarrow \frac{0{,}08}{3.7 \cdot 10^{-3}} = \alpha$$

$$\frac{\alpha t^2}{2} = \theta \qquad \frac{r\alpha t^2}{2} = d$$

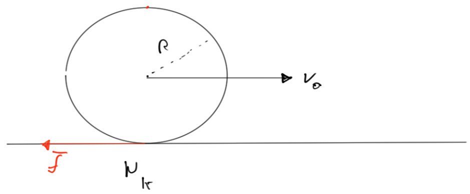
Givet

$$R = 7.6cm \ \tau_f = 0.11Nm \ F = 2.5N \ t = 1.3s$$

Sökt:

1. Hur långt är det papper som dras ut under de första 1.3s?
2. Hur lång papper dras ut under $t \in [1.3, \infty]$

Exempel 2

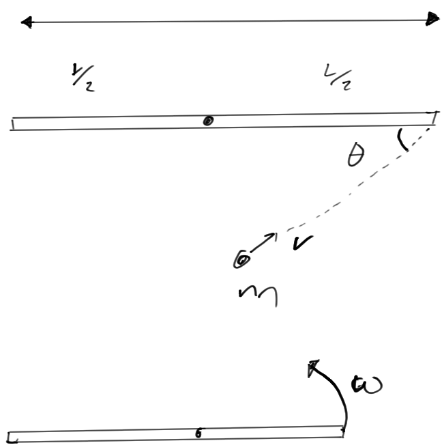


Bowling Givet:

$$R = 0.11m,\ \mu_k = 0.21,\ v_0 = 8.0m/s,\ \omega_0 = 0,\ I\frac{2}{5}MR^2 \text{ sfär}$$

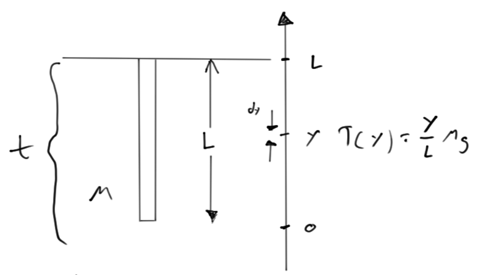
1. Retardationen under glidningsfasen
2. Vinkelacceleration under glidningsfasen
3. Glid tid
4. Glidsträcka

Exempel 3



$$l = 0.5m,\ M = 4kg,\ m = 3.00g,\ \omega = 10rad/s,\ \theta = 60^\circ$$

Exempel 4



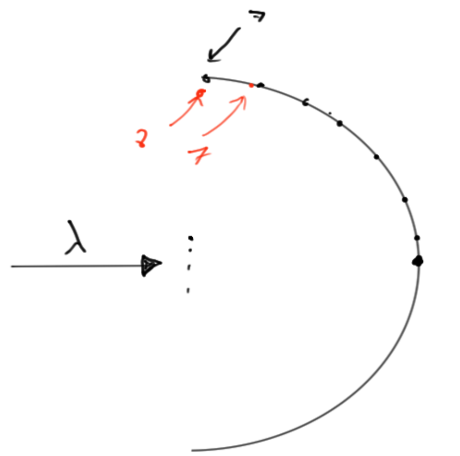
$$dy = v(y)\,dt$$

$$dy = \sqrt{\frac{\frac{y}{L} mg}{\frac{m}{L}}}\,dt = (yg)^{1/2}\,dt \Longrightarrow$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$$

$$\int_0^t dt = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^L y^{-1/2}\,dy \Longrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[2y^{1/2} \right]_0^L = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Exempel 5



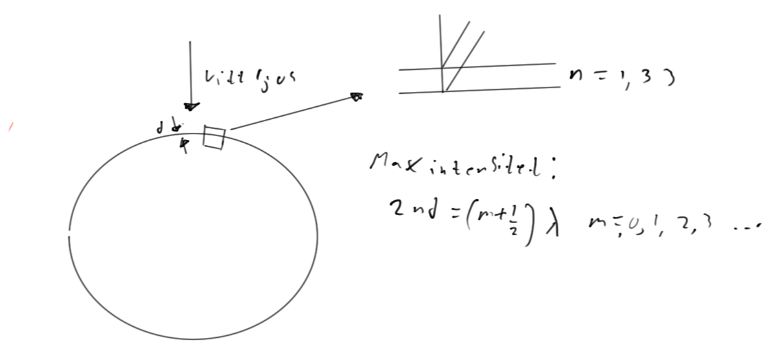
$$\lambda = 654 \cdot 10^{-9} m$$

Man observera 15 max, bestäm vilket intervall d ligger inom!

Max: $d \sin\theta = m\lambda$, för gitter. största $m : 7$.

$$d_{min} \cdot 1 = 7\lambda,\ d_{max} \cdot 1 = 8\lambda \rightarrow d \in [7\lambda, 8\lambda]$$

Exempel 6



Såphinna, För $d = 115nm$, vilka våglängder i det synliga området ger max intensitet?

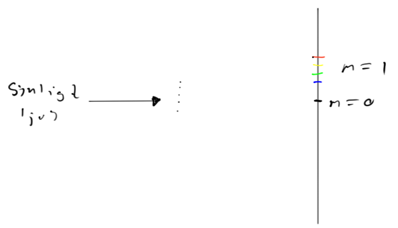
$\lambda_{synligt} \in [400, 700]nm$

$$\lambda = \frac{2nd}{m + \frac{1}{2}}$$

$$\lambda_0 = \frac{2 * 1.33 * 115}{\frac{1}{2}}$$

Exepmel 7

Bestäm den högsta ordningens m som inte ger ett överlapp mellan ordningar.



$$m(\lambda_0 - \lambda_1) + \lambda_0 = 0$$

$$\frac{-\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} = m$$

$$\frac{400}{700 - 400} = \frac{4}{3} = m$$